

PENZE:
KVANTITATIVNÍ PŘÍSTUP

Tomáš Cipra

Matematicko-fyzikální fakulta UK Praha

Nadační fond pro podporu vzdělávání v pojišťovnictví

Praha, 11. června 2014

Cipra, T: Penze: kvantitativní přístup.

Ekopress, Praha 2012 (409 stran, ISBN: 978-80-86929-87-3)

OBSAH:

1. ÚVOD

2. ZABEZPEČENÍ VE STÁŘÍ

3. KLASIFIKACE DŮCHODOVÝCH SYSTÉMŮ

4. FINANČNÍ ASPEKTY PENZIJNÍCH PLÁNŮ

4.1. Finanční nástroje

4.2. Osobní penzijní aktiva

4.3. Korporátní finance v kontextu penzí

4.4. Globální penzijní aktiva

5. FINANČNÍ MODELOVÁNÍ V RÁMCI PENZÍ

5.1. Finanční modely s deterministickým výnosem

5.2. Finanční modely se stochastickým výnosem

6. DEMOGRAFICKÉ ASPEKTY PENZIJNÍCH PLÁNŮ

7. DEMOGRAFICKÉ MODELOVÁNÍ V RÁMCI PENZÍ

7.1. Demografické modelování dožívání

7.2. Úmrtnostní tabulky

7.3. Populační projekce v rámci penzí

7.4. Vícestavové modely v rámci penzí

8. ANUITY

8.1. Životní anuity a jejich typy

8.2. Anuitní trhy

8.3. Anuity s pevnou dobou výplaty

8.4. Modelování životních anuit

8.5. Další poznámky k životním anuitám a jejich modelování

8.6. Variabilní životní anuity

9. MODELOVÁNÍ PENZIJNÍCH SYSTÉMŮ

9.1. Modelování penzijních plánů typu DB a DC

9.2. Penzijní závazky v plánech typu DB

9.3. Udržitelné penzijní výdaje

10. FINANCOVÁNÍ PENZIJNÍCH PLÁNŮ

10.1. Metody financování penzijních plánů

10.2. Fondové financování pravidelně placenými příspěvky

11. TEORIE PENZIJNÍ POPTÁVKY A UŽITKOVOSTI

11.1. Poptávka po penzích

11.2. Užitek penzí

11.3. Penzijní hlavolam

12. ŘÍZENÍ RIZIKA DLOUHOVĚKOSTI

12.1. Subjektivní odklad anuitizace

12.2. Sekuritizace rizika dlouhověkosti

13. NĚKTERÉ ASPEKTY PRŮBĚŽNÝCH PENZ. SYSTÉMŮ

13.1. Porovnání mechanismu průběžného a fondového penz. plánu

13.2. Implicitní daň a implicitní dluh průběžného penz. plánu

**13.3. Rozložení implicitní daně průběžného penz. systému do
životního cyklu**

13.4. Politická průchodnost penzijních reforem

13.5. Vliv pracovní mobility na penzijní systémy

14. DŮCHODOVÉ POJIŠTĚNÍ V ČESKÉ REPUBLICE

14.1. Základní principy a charakteristiky

14.2. Základní výpočetní veličiny

14.3. Důchodový věk

14.4. Starobní důchod

14.4.1. Podmínky nároku na starobní důchod

14.4.2. Výše starobního důchodu

14.4.3. Přepočítání starobního důchodu

14.4.4. Starobní důchod při výdělečné činnosti

**14.4.5. Invalidní, vdovský a vdovecký důchod a souběh
nároků na důchody**

14.5. Zvyšování důchodů

14.6. Reforma prvního pilíře

15. DRUHÝ A TŘETÍ PILÍŘ V RÁMCI PENZ. REFORMY V ČR

15.1. Původní penzijní připojištění se státním příspěvkem

15.2. Druhý pilíř: důchodové spoření

15.3. Třetí pilíř: doplňkové penzijní spoření

15.3.1. Účastnické fondy

15.3.2. Transformované fondy

LITERATURA

REJSTŘÍK

1. ÚVOD

Monografie se zabývá problematikou **penzí**:

- a to především **penzí starobních**, které označují příjem vyplácený od okamžiku penzionování (tj. od okamžiku odchodu do penze či kladně vyřízené žádosti o vyplácení penze);
- aktivní populace v řadě zemí (např. zaměstnanci v České republice) na penze většinou pohlíží jako na důležitou součást systému odměn (**benefitů**) odložených během aktivního života na stáří;
- značná publicita věnovaná této problematice se odrazila ve **zvýšené informovanosti o penzích** včetně zájmu jednotlivců o **finanční plánování** související s důchodovým věkem.

Velmi ***komplexní téma zasahující do celé řady oborů:***

- politika, právo, sociologie, ekonomie, finance, demografie, matematika aj.

a daleko více ***podoborů:***

- sociální politika, charita, důchodová legislativa, sociální gerontologie, geriatrie, národní účetnictví, teorie užitku, veřejné finance, finanční trhy, investiční management, populační projekce, teorie rizika, aktuárské vědy aj.

Příspěvek se zaměřuje na ***kvantitativní problematikou penzí:***

- nejen konkrétní numerické kalkulace, ale i prezentace abstraktnějších postupů založených na ***matematickém modelování;***
- ***matematika ve společenských vědách*** má dnes jak své zastánce, tak své odpůrce:

Odpůrci:

- exaktnost matematických předpokladů je se společenskou praxí neslučitelná (v matematických formulích se ztrácí ***lidský faktor***);
- dnešní penzijní systémy jsou „***přektuarizované***“ a v různých situacích, které může život přinést, se začnou od matematických modelů a šablon fatálně odchylovat.

Zastánci:

- v kontextu penzí je vždy nutné nakonec něco *spočítat, odhadnout, předpovědět* (s předepsanou spolehlivostí takové předpovědi), *rezervovat* (s předepsanou pravděpodobností eliminace „ruinování“);
 - to sebelepší politické či morální proklamace nedokážou.
- ⇓
- Zmíněné obory včetně *penzijní matematiky* by měly *koexistovat v určité symbióze* a navzájem profitovat na svých přednostech.

Důsledky **ekonomického a demografického vývoje**:

- ***problém priorit*** pro rozpočty vyspělých ekonomik a jejich politické reprezentace v příštích desetiletích: ***upřednostňovat výdaje na vzdělání a potřeby mladých lidí, nebo sociální a zdravotní péči pro lidi staré?***
- ***výdaje na podporu starších rostou úměrně se stárnutím populace*** ⇒
 - tlak na zajištění toho, co se v moderní společnosti označuje jako ***důstojné stáří***;
 - ***rodinná podpora*** přestala být v řadě zemí sociální jistotou;
 - napětí, které se začíná projevovat v ***mezigeneračních konfliktech a neshodách*** včetně volebních výsledků.

2. ZABEZPEČENÍ VE STÁŘÍ

Základní opory: ***stát, rodina, trh***

Stát (či vláda):

- = *přerozděluje příjmy a služby* jak v čase (tj. v průběhu lidského života), tak mezi jednotlivci;
- tato *přerozdělovací úloha státu* bývá ve srovnání s ostatními zdroji dominantní.

Rodina:

- = hraje významnou roli zvláště co se týče **pečovatelských služeb**:
- **skandinávské země** jsou výjimečné téměř univerzální veřejnou péčí nerodinného typu o starší spoluobčany
- v **USA** existuje široká tržní nabídka placených pečovatelských služeb;
- **soužití s dětmi** nejen vypovídá o rodinné péči, ale i o ekonomickém postavení starších lidí obecně:
 - **Itálie a Španělsko**: zhruba 30 % starších žije s dětmi;
 - **Dánsko**: soužití generací již spíše výjimkou;
 - jestliže se stárnutí populace bude zčásti kompenzovat **větším zaměstnáváním žen**, pak péče rodinného typu o starší je v budoucnu neudržitelná.

Tržní investování úspor:

- = má v *různých zemích různou váhu*;
- role úspor posiluje tam, kde dochází k *oklešťování státního důchodového zdroje* nebo při *zvyšování daňových či jiných stimulů* zvýhodňujících firemní nebo soukromé důchodové spoření (*anglosaské země, Holandsko*).

Historie:

- = může být inspirativní pro současné pokusy o důchodové reformy;
- v 17. a 18. st. např. ve Francii a Nizozemsku tzv. *tontiny*:
 - = půjčky státu (jejich motivací byly prázdné státní pokladny);
 - každým rokem byl žijícím věřitelům rozdělen stanovený úrok připadající na složený kapitál;
 - při úmrtí připadla příslušná jistina ve prospěch zbývajících věřitelů;
 - tj. vlastně doživotní důchod, který s rostoucím věkem rostl vzhledem k postupnému vymírání počátečního souboru věřitelů (tedy jakási *sázka na přežití*).

– **Německo 1889:**

- koncem 19. st. sociální problém vyvolaný *významným nárůstem počtu starších chudých lidí*;
- díky *Bismarckovi* Německo prvním státem s povinným veřejným systémem starobních důchodů:
 - 1889: *starobní důchodové pojištění*:
 - týkalo se všech dělníků a některých úředníků s platem do určitého stropu;
 - *důchod vyplácen až od věku 70 let* (tím pádem starobní důchod pobíral jen omezený počet pojištěnců);
 - fondový systém financovaný stejně vysokými příspěvky zaměstnanců a zaměstnavatelů + paušální částka od státu.

- ***UK a Beveridgeův model národního pojištění:***
 - uplatnil se v plném rozsahu až po 2. světové válce (viz tzv. Beveridgeovu zprávu z roku 1942);
 - britský ekonom Beveridge zastával názor, že *nezasloužená chudoba ve vyšším věku* může být minimalizována jen na základě *penze vyplácené univerzálně všem občanům od jistého věku a financované ze státních daňových výnosů*;
 - *příspěvky*: nezávislé na výši pracovních příjmů;
 - *dávky*: velmi nízké ← *sociální pojištění má sloužit jen k odstranění nejhorší nouze a nemá podryvat odpovědnost občanů spolupodílet se na svém vlastním zabezpečení ve stáří především formou zaměstnaneckého či soukromého pojištění.*

- **Období po 2. světové válce:**
 - *politizace problematiky*: rychlá expanze státních důchodových systémů znamenala krátkodobě bezpracné navyšování příjmů do státních rozpočtů;
 - *lákavé pro politiky* (shánějící před volbami politické hlasy) jako známý „*oběd zadarmo*“ (*free lunch*);
 - *60. léta 20. století*: pracovní síla většiny průmyslových zemí téměř *kompletně pokryta státními důchodovými systémy*;
 - *80. léta 20. století*: státní sociální systémy většiny vyspělých zemí dosáhly své *zralosti*: zatímco počet plátců (tj. aktivních pojištěnců) se stabilizoval, počet příjemců (tj. důchodců) začal postupně růst;
- ↓
- naplňuje se tušení, že *oběd zadarmo je vlastně velmi drahé jídlo*.

3. DŮCHODOVÁ REFORMA

- tento aktuální pojem v řadě zemí značně *zpolitizován*;
- předem jasný je fakt, že *žádné univerzální reformní řešení neexistuje*;



- ***OECD 2011 - „tři řešení důchodového paradoxu“:***

(1) *První řešení = prodloužení pracovní periody lidského života (tj. delší pracovní život):*

- pro svou jednoduchost již realizováno v řadě zemí;
- podle OECD bude *v budoucnu hlavním řešením* jak snížit výdaje na důchody.

Počet let strávených v důchodu (zdroj: OECD (2011))

	<i>Muži</i>		<i>Ženy</i>	
	<i>2010</i>	<i>2050</i>	<i>2010</i>	<i>2050</i>
<i>Česko</i>	17,0	18,1	23,8	22,5
<i>Finsko</i>	16,8	19,8	21,0	24,7
<i>Francie</i>	21,7	24,8	26,5	29,5
<i>Japonsko</i>	18,8	21,6	24,1	27,7
<i>Mad'arsko</i>	16,5	16,3	22,6	21,1
<i>Německo</i>	17,0	20,3	20,7	24,4
<i>Polsko</i>	14,4	17,2	23,1	26,6
<i>Rakousko</i>	17,5	21,1	25,1	24,5
<i>Řecko</i>	24,0	24,1	27,1	28,3
<i>Slovensko</i>	14,9	18,6	24,9	23,9
<i>Švédsko</i>	17,9	21,1	21,1	24,2
<i>UK</i>	16,9	16,9	24,5	21,9

(2) ***Druhé řešení*** = státní důchodové systémy se zaměří (výlučně nebo přednostně) na ty složky populace, které jsou z ***hlediska důchodů nejvíce zranitelné***;

– souvisí s ***přerozdělováním*** prostředků vyplácených jako penze.

(3) ***Třetí řešení*** = ***větší podpora vlastních úspor na stáří*** prostřednictvím (soukromých) penzijních fondů či jiných forem spoření:

– většinou zde důležitou roli hrají ***daňové úlevy či jiné pobídky státu***;

– úspěchem je fakt, že v řadě zemí (např. v Německu) se daří pro toto řešení získávat i ***mladší ročníky a nízkopříjmové zaměstnance***.

Mezigenerační smlouva:

- měla by aspoň do určité míry garantovat důstojné stáří, aniž by neúnosně zatížila aktivní a mladou populací;
- ***Musgraveovo pravidlo***: jak rozdělit příslušné náklady spravedlivě mezi generace (***spravedlivá alokace narůstajícího důchodového břemene mezi generace***);
- podle tohoto pravidla by dělení probíhalo podle pevně nastaveného poměru, s kterým by se v dlouhém časovém horizontu (především bez ohledu na střídání politické reprezentace) nesmělo hýbat.

- příspěvky a dávky upravovány tak, aby při zachování vyrovnaného rozpočtu v průběžném systému zůstal *konstantní poměr průměrného čistého výdělku v aktivní populaci* (po odečtení daně či příspěvku na důchod) a *průměrného čistého důchodu v populaci důchodců*;
- *při stárnutí populace* se sice zvyšují příspěvky (daně) a tedy redukují čisté výdělky, ale v důsledku fixního poměru dochází k redukci také u důchodů, takže *obě strany (aktivní a pasivní) jsou postiženy stejným tempem*;
- pokud přitom ovšem dochází k *významnému nárůstu produktivity práce*, pak zmíněné postižení se projeví jen zpomalením tempa růstu čistých výdělku a důchodů.

4. DEMOGRAFICKÉ ASPEKTY PENZIJNÍCH PLÁNŮ

Rektangularizace dožívání:

- stále více lidí se dožívá mimořádně vysokého věku, který je ale zároveň *stropem možností lidského organismu*;
- tímto stropem je z hlediska pokroků ve výživě a medicíně během 20. století *věk 115 let*:
 - 8 z posledních 9 držitelů titulu „nejstarší žijící člověk“ (z pohledu roku 2011) získalo tento primát ve věku 114 let a 1 ve věku 115 let;
 - v Japonsku v roce 1990 žilo zhruba 3 000 lidí starších 100 let, přičemž tomu nejstaršímu bylo 114, zatímco v roce 2010 zde žije již 44 000 lidí starších 100 let, přičemž tomu nejstaršímu je opět 114 let.

Populační projekce v rámci penzí:

- hrají při propočtech penzijních systémů klíčovou roli; lze je klasifikovat podle různých hledisek:
- ***podle předpovědního horizontu:***
 - ***krátkodobé*** (do 10 let);
 - ***střednědobé*** (10-25 let);
 - ***dlouhodobé*** (nad 25 let, tj. pro dobu aspoň jedné generace);
- ***podle použitých variant (scénářů) budoucího vývoje:***
 - ***nízká varianta*** (obvykle pesimistická nebo minimalistická);
 - ***střední varianta*** (obvykle průměrná nebo nejpravděpodobnější);
 - ***vysoká varianta*** (obvykle optimistická nebo maximalistická);

- *podle použité metody konstrukce:*
 - *formální extrapolace časových řad* (obvykle doplněná odhadem věkové struktury);
 - *složková metoda* (skládá projekci z dílčích projekcí několika komponent);
 - *složková metoda zohledňující budoucí migraci.*
- *v ČR existují dvě složkové populační projekce* umožňující dlouhodobé projekce vybraných ukazatelů důchodového systému:

Populační projekce ČSÚ:

- oficiální populační projekce ČSÚ označovaná jako *Projekce obyvatelstva České republiky do roku 2050* (viz www.czso.cz).

Tab. Vybrané hodnoty z populační projekce ČSÚ

<i>Věková</i>	<i>2005</i>	<i>2010</i>	<i>2020</i>	<i>2030</i>	<i>2040</i>	<i>2050</i>
<i>0-14 let</i>	1 501 331	1 400 028	1 408 644	1 274 155	1 197 00	1 173 00
<i>15-64 let</i>	7 293 357	7 286 202	6 786 952	6 520 205	5 964 56	5 309 25
<i>65 a více</i>	1 456 391	1 596 812	2 088 333	2 308 073	2 633 55	2 956 07
<i>Počet</i>	10 251 07	10 283 04	10 283 92	10 102 43	9 795 11	9 438 33
<i>0-14 let</i>	14,6 %	13,6 %	13,7 %	12,6 %	12,2 %	12,4 %
<i>15-64 let</i>	71,2 %	70,9 %	66,0 %	64,5 %	60,9 %	56,3 %
<i>65 a více</i>	14,2 %	15,5 %	20,3 %	22,9 %	26,9 %	31,3 %
<i>I. závislosti</i>	20,0	21,9	30,8	35,4	44,2	55,7
<i>I. stáří</i>	97,0	114,1	148,3	181,1	220,0	252,0
<i>I. ekon.zatíž.</i>	40,6	41,1	51,5	54,9	64,2	77,8

Populační projekce PŘF UK:

- projekce zkonstruovaná na katedře demografie PŘF UK označovaná jako *Kmenová prognóza populačního vývoje České republiky 2003-2065 (Burcin a Kučera (2004))*.

Tab. Vybrané hodnoty z populační projekce PŘF UK

<i>Věková</i>	<i>2005</i>	<i>2010</i>	<i>2020</i>	<i>2040</i>	<i>2065</i>
<i>0-14 let</i>	1 501 331	1 473 660	1 546 687	1 373 459	1 334 25
<i>15-64 let</i>	7 293 357	6 509 642	6 096 372	5 396 314	4 912 63
<i>65 a více</i>	1 456 391	2 321 698	2 761 283	3 461 510	3 468 76
<i>Počet</i>	10 251 07	10 305 000	10 404 34	10 231 28	9 715 64
<i>0-14 let</i>	14,6 %	14,3 %	14,9 %	13,4 %	13,7 %
<i>15-64 let</i>	71,2 %	63,2 %	58,6 %	52,7 %	50,6 %
<i>65 a více</i>	14,2 %	22,5 %	26,5 %	33,8 %	35,7 %
<i>I. závislosti</i>	20,0	35,7	45,3	64,1	70,6
<i>I. stáří</i>	97,0	157,5	178,5	252,0	260,0
<i>I. ekon.zatíž.</i>	40,6	58,3	70,7	89,6	97,8

5. AKTUÁRSKÉ PENZIJNÍ MODELY

5.1. Peněžní hodnota penzí

- *Střední počáteční hodnota jednotkové polhůtní roční penze s časovou strukturou úrokových měr:*

$$E(PV_x) = \frac{1P_x}{1+r_1} + \frac{2P_x}{(1+r_2)^2} + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{jP_x}{(1+r_j)^j}$$

- *s růstovým faktorem g :*

$$E(PV_x) = \frac{1P_x}{1+r_1} + \frac{2P_x(1+g)}{(1+r_2)^2} + \frac{3P_x(1+g)^2}{(1+r_3)^3} + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1+g)^{j-1} jP_x}{(1+r_j)^j}$$

– s protiinflačním indexem π_j :

$$E(PV_x) = \frac{{}_1P_x(1 + \pi_1)}{1 + r_1} + \frac{{}_2P_x(1 + \pi_1)(1 + \pi_2)}{(1 + r_2)^2} + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^j (1 + \pi_k) \frac{{}_jP_x}{(1 + r_j)^j}$$

– s G -letou garancí:

$$E(PV_x) = \sum_{j=1}^G \frac{1}{(1 + r_j^t)^j} + \sum_{j=G+1}^{\infty} \frac{{}_jP_x^t}{(1 + r_j^t)^j}$$

– *Anuitní sazba (annuity rate):*

$$Ann = Ann_x^t = \frac{\text{anuitní výplata}}{\text{jednorázové pojistné}} =$$

= anuitní výplata na jednorázové pojistné 100 000

Výběr kótovaných anuitních sazeb na anuitním trhu 2007 v UK

(*Financial Service Authority: www.fsa.gov.uk*)

	<i>Měsíční výplata penze na jednorázové pojistné £ 100 000 ve věku 65</i>					
	<i>Muži 65</i>			<i>Ženy 65</i>		
	<i>Fixní</i>	<i>g = 3 % p.a.</i>	<i>π</i>	<i>Fixní</i>	<i>g = 3 % p.a.</i>	<i>π</i>
<i>AEGON</i>	616	451	–	576	409	–
<i>AXA</i>	557	403	358	518	362	317
<i>Canada Life</i>	615	454	395	578	416	358
<i>Prudential</i>	602	436	400	577	414	369
<i>Reliance Mutual</i>	590	420	–	559	388	–

	<i>Měsíční výplata penze na jednorázové pojistné £ 100 000 ve věku 65 s <u>5letou garancí</u></i>					
	<i>Muži 65</i>					
	<i>Fixní</i>	<i>g = 3 % p.a.</i>	<i>π</i>			
<i>AEGON</i>	612	449	–			
<i>AXA</i>	555	402	357			
<i>Canada Life</i>	613	452	394			
<i>Prudential</i>	598	434	398			
<i>Reliance Mutual</i>	587	418	–			

	<i>Měsíční výplata penze na jednorázové pojistné £ 100 000 ve věku 65 – <u>jen kuřáci</u></i>					
	<i>Muži 65</i>					
	<i>Fixní</i>	<i>g = 3 % p.a.</i>	<i>π</i>			
<i>Just Retirement Ltd</i>	663	507	449			
<i>Reliance Mutual</i>	745	581	–			
<i>Tomorrow</i>	712	549	467			

– *Peněžní hodnota penze (money's worth):*

$$MW = \frac{PV}{\text{jednorázové pojistné}} = Ann_x \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j P_x}{(1+r)^j}$$

– *typicky je $MW < 1$;*

– *ideální případ $MW = 1$ jen v případě perfektně konkurenčního trhu bez transakčních a administrativních poplatků.*

Odhad hodnoty MW na anuitním trhu v UK: muži 65

	<i>Typ annuity</i>	E(MW)	<i>95% interval spolehlivosti</i>
<i>1978-1991</i>	5-letá garance	0,978	(0,955; 1,001)
<i>1990-1999</i>	5-letá garance	0,985	(0,955; 1,015)
<i>1999-2002</i>	5-letá garance	0,938	(0,891; 0,984)
<i>2001-2007</i>	bez garance	0,928	(0,847; 1,009)

5.2. Modelování penzijních anuit

- pro analytické účely jsou vhodné modely ve spojitém čase;
- *střední počáteční hodnota jednotkové okamžitě vyplácené penze:*

$$\bar{a}_x = E\left(\int_0^{T_x} e^{-rt} dt\right) = \int_0^{\infty} e^{-rt} \cdot {}_t p_x dt$$

- (1) *exponenciální zákon úmrtnosti* ${}_t p_x = e^{-\lambda \cdot t}$ (λ je tzv. *okamžitá intenzita úmrtnosti*):

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-(r+\lambda) \cdot t} dt = \frac{1}{r + \lambda}$$

(2) Gompertzův-Makehamův zákon úmrtnosti: $\lambda(x) = \lambda + \frac{1}{b}e^{(x-m)/b}$:

$${}_t p_x = \exp\left\{-\int_x^{x+t} \lambda(s) ds\right\} = \exp\left\{-\lambda \cdot t + b \cdot (\lambda(x) - \lambda) \cdot (1 - e^{t/b})\right\}$$

$$\bar{a}_x = \frac{b \cdot \Gamma\left(-(\lambda + r) \cdot b, e^{\frac{x-m}{b}}\right)}{\exp\left\{(m-x) \cdot (\lambda + r) - e^{\frac{x-m}{b}}\right\}}$$

kde neúplná gama funkce je $\Gamma(a, c) = \int_c^{\infty} e^{-t} \cdot t^{a-1} dt$.

5.3. DB modely versus DC modely

- ***DB model (defined benefit = dávkově definovaný):***
 - *např.* zaručí doživotní penzi ve výši 40 % platu před odchodem do důchodu;
 - *průběžně* (tj. nefondově PAYGO) nebo *fondově financovaný*;
 - odpovídající ***riziko*** (investiční a dlouhověkosti) je na straně sponzora (organizátora) penzijního plánu;
 - ***vyměřovací vzorec*** pro výši dávky v závislosti na počtu odpracovaných let.

$$DB - \text{dávka} = \alpha \cdot T \cdot \beta \cdot \int_0^T e^{-\beta \cdot (T-s)} \cdot w(s) \, ds = \alpha \cdot T \cdot \omega(T)$$

T *doba zaměstnání*

α *zásluhový penzijní faktor* (accrual factor)

$\omega(T)$ *vážený mzdový základ* (tj. vhodně vážená celoživotní mzda):

$$\omega(T) = \beta \cdot \int_0^T e^{\beta \cdot (T-s)} \cdot w(s) \, ds$$

β *váhový koeficient* pro vážený mzdový základ, např. pro

$w(s) = w \cdot e^{k \cdot s}$ (k je *platový růst*):

$$\omega(T) = \frac{\beta \cdot w}{\beta + k} \left(e^{k \cdot T} - e^{-\beta \cdot T} \right)$$

– čím je $\beta \leq 1$ bližší 1, tím je $\omega(T)$ bližší finálnímu platu $w(T)$

Náhradový poměr v DB modelu: $T = 30$ let; $k = 1$ %

α	<i>Penze /Finální mzda</i>		
	$\beta = 0,1$	$\beta = 0,2$	$\beta = 1,0$
$\alpha = 1,00$ %	26,3 %	28,5 %	29,7 %
$\alpha = 1,25$ %	32,8 %	35,6 %	37,1 %
$\alpha = 1,50$ %	39,4 %	42,7 %	44,5 %
$\alpha = 1,75$ %	46,0 %	49,9 %	52,0 %
$\alpha = 2,50$ %	65,6 %	71,3 %	74,3 %

- ***DC model (defined contribution = příspěvkově definovaný):***
 - *např.* jednorázově vyplatí částku nakumulovanou během aktivní účasti v penzijním plánu nebo za ni jednorázově zaplatí doživotní anuitu u komerční životní pojišťovny;
 - ***pravidelné spoření*** na důchodový účet účastníka;
 - odpovídající ***riziko*** straně účastníka penzijního plánu.

$$DC - dávká = \frac{\int_0^T c(s) \cdot e^{g(s) \cdot (T-s)} \cdot w(s) ds}{\bar{a}_x}$$

T *do*ba zaměštnání (aktivního života) do důchodového věku x

$c(s)$ *příspěvková sazba* (contribution rate)

$g(s)$ *investiční růst* (investment growth *p.a.*)

$w(s)$ *výše platu*, např.

$$w(s) = w \cdot e^{k \cdot s}$$

k *platový růst* (wage growth *p.a.*)

Náhradový poměr v DC modelu: $T = 30$ let; $k = 1$ %; $r = 3,5$ %;
 $\lambda = 0$; $m = 86,34$; $b = 9,50$

<i>c</i>	<i>Penze /Finální mzda</i>		
	<i>g = 3 %</i>	<i>g = 5 %</i>	<i>g = 7 %</i>
<i>c = 4 %</i>	12,6 %	17,8 %	25,8 %
<i>c = 6 %</i>	18,9 %	26,7 %	38,7 %
<i>c = 8 %</i>	25,2 %	35,6 %	51,6 %
<i>c = 10 %</i>	31,5 %	44,5 %	64,5 %
<i>c = 12 %</i>	37,8 %	53,4 %	77,4 %

5.4. Udržitelné penzijní výdaje

- Počáteční hodnota jednotkové penze od věku x je *náhodná veličina*:

$$PV_x = \int_0^{T_x} e^{-rt} dt$$

T_x zbývající doba života ve věku x (např. exponenciální zákon úmrtnosti ${}_t p_x = e^{-\lambda \cdot t}$ s okamžitou intenzitou úmrtnosti λ)

e^{rt} geometrický Brownův pohyb $e^{\mu \cdot t + \sigma \cdot B_t}$ s driftem μ a volatilitou či difuzním koeficientem σ ($\{B_t\}$ je standardní Brownův pohyb)

- *Pravděpodobnost udržitelnosti penze* pro nakumulovaný kapitál W :

$$P(PV_x \leq W)$$

- **Pravděpodobnost neudržitelnosti penze** pro nakumulovaný kapitál W :

$$P(PV_x > W)$$

- Pravděpodobnost (ne)udržitelnosti penze lze vyšetřovat **simulačně**
- nebo někdy **analyticky** (např. pro exponenciální zákon úmrtnosti):

$$P(PV_x > W) = 1 - \frac{b^{-a}}{\Gamma(a)} \int_0^W y^{-(a+1)} e^{-1/(y \cdot b)} dy,$$

kde $a = \frac{2\mu + 4\lambda}{\sigma^2 + \lambda} - 1$, $b = \frac{\sigma^2 + \lambda}{2}$ (tzv. **reciproční gama rozdělení**).

**Pravděpodobnost neudržitelnosti penze pro vybrané důchodové věky x
a roční výběry nakumulovaného penzijního kapitálu $W = 1\,000\,000$ Kč:
 $\mu = 7\%$; $\sigma = 20\%$**

x	λ	<i>Roční výběry nakumulovaného penzijního kapitálu $W = 1\,000\,000$ Kč:</i>					
		<i>20 000 Kč</i>	<i>40 000 Kč</i>	<i>50 000 Kč</i>	<i>60 000 Kč</i>	<i>90 000 Kč</i>	<i>100 000 Kč</i>
55	2,48 %	4,3 %	18,0 %	26,7 %	35,7 %	60,2 %	66,8 %
65	3,67 %	2,6 %	12,3 %	18,9 %	26,2 %	48,3 %	54,9 %
70	4,75 %	1,8 %	9,0 %	14,2 %	20,1 %	39,5 %	45,8 %
75	6,48 %	1,1 %	5,7 %	9,3 %	13,6 %	29,0 %	34,4 %
80	9,37 %	0,5 %	3,0 %	5,1 %	7,7 %	18,0 %	21,9 %

**Maximální možné roční výběry nakumulovaného penzijního kapitálu
 $W = 1\,000\,000$ Kč při toleranci 5 % pro vybrané důchodové věky x
a očekávané roční investiční výnosy μ ($\sigma = 20$ %)**

x	$x + \text{Med}$	<i>Očekávané roční investiční výnosy μ:</i>					
		3 %	4 %	5 %	6 %	7 %	8 %
55	83,0	5 260 Kč	8 590 Kč	12 470 Kč	16 800 Kč	21 480 Kč	26 470 Kč
65	83,9	9 230 Kč	12 960 Kč	17 100 Kč	21 570 Kč	26 330 Kč	31 350 Kč
70	84,6	13 100 Kč	17 070 Kč	21 350 Kč	25 920 Kč	30 740 Kč	35 760 Kč
75	85,7	19 580 Kč	23 800 Kč	28 250 Kč	32 930 Kč	37 790 Kč	42 840 Kč
80	87,4	30 800 Kč	35 250 Kč	39 880 Kč	44 660 Kč	49 590 Kč	54 650 Kč