# Výpočet sazeb v neživotním pojištění

**Martin Branda**

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta
Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Nadační fond pro podporu vzdělávání v pojišťovnictví
2015

# Obsah

# Obsah

# Cíl projektu

- Hlavním cílem projektu je seznámit studenty magisterského oboru Finanční a pojistná matematika na MFF UK s klasickými a moderními přístupy k tvorbě (matematických) sazeb v neživotním pojištění.

# Praktické zkušenosti

**Moje zkušenosti:**

- 5 let spolupráce s VIG ČR (ČPP, Kooperativa)
- Sazbování pro VIG Chorvatsko
- Workshop ve Varšavě pro skupinu VIG (nejen polskou část)
- Odborné články
- Prezentace na konferencích (Haag, Vídeň, Lisabon)

**Absolvované workshopy:**

- PriceWaterhouseCoopers – jednodenní workshop (Praha, konzultanti z Dublinu)
- Tower Watson: Emblem – demonstrace (Praha)
- Earnix for Market Pricing – demonstrace a workshop (Praha – Ernst & Young, Varšava – zakladatel)
- European Actuarial Academy: dvoudenní workshop (Praha)

# Studentské práce

- *: *Tvorba optimálních sazeb v neživotním pojištění* (bakalářská práce, měla navázat diplomová práce)
- **: *Optimalizační přístupy k sazbování v neživotním pojištění* (bakalářská práce)
- ***: *Klasické a moderní přístupy k sazbování v neživotním pojištění* (diplomová práce)

# Obsah

# Klasické přístupy k sazbování

Označíme $L$ náhodnou ztrátu, $\mu_L = \mathbb{E}[L]$ její střední hodnotu, $\sigma_L^2 = var(L)$ její rozptyl.

- Sazba založená na střední hodnotě: $P(L) = (1+\rho)\mu_L$, $\rho \geq 0$
- Princip rozptylu: $P(L) = \mu_L + \alpha \cdot \sigma_L^2$, $\alpha > 0$
- Princip směrodatné odchylky: $P(L) = \mu_L + \alpha \cdot \sigma_Z$, $\alpha > 0$

# Klasické přístupy k sazbování

Přístupy založené na mírách rizika, $\varepsilon \in (0,1)$ (obvykle malé):

- Hodnota v riziku (Value at Risk):

$$VaR_{1-\varepsilon}(L) = \min z : \; P(L \leq z) \geq 1 - \varepsilon$$

- Tail Value at Risk:

$$TVaR_{1-\varepsilon}(L) = \mathbb{E}[L | L > VaR_{1-\varepsilon}]$$

- Podmíněná hodnota v riziku (Conditional Value at Risk):

$$CVaR_{1-\varepsilon}(L) = \min z + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[L - z]^{+}$$

Více v Tse (2009).

# Obsah

# Tarifní třídy

Vytváříme sazebník na základě $S+1$ **segmentačních kritérií**, která významně odlišují rozdělení úhrnu škod. Nechť

- $i_0 \in \mathcal{I}_0$, např. tarifní skupiny $\mathcal{I}_0 = \{$A1, A2, A3, A4, A5$\}$,
- $i_1 \in \mathcal{I}_1, \ldots, i_S \in \mathcal{I}_S$, např. věk $\mathcal{I}_1 = \{$18-30 let, 30-65 let, 65 a více let$\}$

Označíme $I = (i_0, i_1, \ldots, i_S)$ **tarifní třídu**, kde $I \in \mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \otimes \mathcal{I}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{I}_S$. Nechť $W_I$ počet smluv ve třídě $I$.

# Složené rozdělení úhrnu škod

## Značení a předpoklady

Úhrn škod pro tarifní třídu $I$ s expozicí $W_I$ během jednoho roku

$$L_I^T = \sum_{w=1}^{W_I} L_{I,w}, \; L_{I,w} = \sum_{n=1}^{N_{I,w}} X_{I,n,w},$$

kde $N_{I,w}$ značí náhodný počet škod na smlouvě během jednoho roku a $X_{I,n,w}$ je náhodná výše škody (claim severity). Předpokládáme, že všechny náhodné veličiny jsou **nezávislé**. Nechť v tarifní třídě $I$ mají $N_{I,w}$ stejné rozdělení pro všechny $w$ a $X_{I,n,w}$ mají stejné rozdělení pro všechny $n$ a $w$.

# Složené rozdělení úhrnu škod
## Střední hodnota a rozptyl

Označíme $N_I, X_I$ nezávislé kopie $N_{I,w}, X_{I,n,w}$. Dostáváme známé vztahy pro střední hodnotu a rozptyl složeného rozdělení úhrnu škod:

$$\begin{aligned}
\mu_I &= \mathbb{E}[L_I] = \mathbb{E}[N_I]\mathbb{E}[X_I], \\
\mu_I^T &= \mathbb{E}[L_I^T] = W_I \mu_I, \\
\sigma_I^2 &= var(L_I) = \mathbb{E}[N_I] var(X_I) + (\mathbb{E}[X_I])^2 var(N_I), \\
(\sigma_I^T)^2 &= var(L_I^T) = W_I \sigma_I^2.
\end{aligned}$$

# Multiplikativní sazebník

Označíme úhrn pojistného $TP_I = W_I Pr_I$ pro třídu $I$. Multiplikativní sazebník předpokládá, že výsledná sazba je složena multiplikativním způsobem ze **základní sazby** $Pr_{i_0}$ a **nezáporných přirážek** $e_{i_1}, \ldots, e_{i_S}$, tj.

$$Pr_I = Pr_{i_0} \cdot (1 + e_{i_1}) \cdot \cdots \cdot (1 + e_{i_S}),$$

$I = (i_0, i_1, \ldots, i_S)$.

# Předepsaný škodní průběh

Naším cílem je najít základní hladiny pojistného a hodnoty přirážkových koeficientů takové, aby bylo zaručen **předepsaný škodní průběh** $\hat{LR}$, tj. chceme splnit **náhodná omezení** ($L_I^T$ jsou náhodné veličiny)

$$\frac{L_I^T}{TP_I} \leq \hat{LR} \text{ for all } I \in \mathcal{I}. \tag{1}$$

Přístup umožňuje předepsat různé škodní průběhy pro různé třídy.

# Omezení – střední hodnota a pravděpodobnost

Obvykle je pojistné nastavováno s ohledem na **střední hodnotu**, tj.

$$\frac{\mathbb{E}[L_I^T]}{TP_I} = \frac{\mathbb{E}[L_I]}{Pr_I} \leq \hat{LR} \text{ for all } I \in \mathcal{I}. \tag{2}$$

Tento přístup však neberu v úvahu rizikovost jednotlivých skupin. Přirozený je požadavek, aby bylo omezení s předepsaným škodním průběhem (1) **splněno s velkou pravděpodobností**

$$P\left(\frac{L_I^T}{TP_I} \leq \hat{LR}\right) \geq 1 - \varepsilon, \text{ for all } I \in \mathcal{I}, \tag{3}$$

kde $\varepsilon \in (0, 1)$, obvykle $\varepsilon$ malé (0.1, 0.05).

# Omezení – pravděpodobnost

Jiný (kolektivní) přístup může předepsat škodní průběh pro celý kmen (nový obchod) s vysokou pravděpodobností:

$$P\left(\frac{\sum_{I\in\mathcal{I}} L_I^T}{\sum_{I\in\mathcal{I}} TP_I} \leq \hat{LR}\right) \geq 1-\varepsilon.$$

# Zobecněné lineární modely

## Modely s logaritmickým linkem

Pro modelování **očekávaného počtu a očekávané výše škod** využijeme zobecněné lineární modely s logaritmickým linkem $g(\mu) = \ln \mu$. Tedy předpokládáme, že pro každou třídu $I = (i_0, i_1, \ldots, i_S)$ platí

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_I] &= \exp\{\lambda_{i_0} + \lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_S}\}, \\ \mathbb{E}[X_I] &= \exp\{\gamma_{i_0} + \gamma_{i_1} + \cdots + \gamma_{i_S}\}, \end{aligned}$$

kde $\lambda_i, \gamma_i$ jsou neznámé koeficienty. Tedy pro očekávaný úhrn škod na smlouvě během jednoho roku platí

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_I] &= \exp\{\lambda_{i_0} + \gamma_{i_0} + \lambda_{i_1} + \gamma_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_S} + \gamma_{i_S}\} \\ &= \exp\{\lambda_{i_0} + \gamma_{i_0}\} \cdot \exp\{\lambda_{i_1} + \gamma_{i_1}\} \cdot \cdots \cdot \exp\{\lambda_{i_S} + \gamma_{i_S}\} \end{aligned}$$

# Zobecněné lineární modely

Více v předešlém projektu
**ZOBECNĚNÉ LINEÁRNÍ MODELY V POJIŠŤOVNICTVÍ**

# Multiplikativní sazebník

Základní sazby a přirážky získáme po vhodném **znormování koeficientů** ze zobecněných lineárních modelů:

$$
\begin{aligned}
Pr_{i_0} &= \frac{\exp\{\lambda_{i_0} + \gamma_{i_0}\}}{\hat{LR}} \cdot \prod_{s=1}^{S} \min_{i \in \mathcal{I}_s} \exp(\lambda_i) \cdot \prod_{s=1}^{S} \min_{i \in \mathcal{I}_s} \exp(\gamma_i), \\
e_{i_s} &= \frac{\exp(\lambda_{i_s})}{\min_{i_s \in I_s} \exp(\lambda_{i_s})} \cdot \frac{\exp(\gamma_{i_s})}{\min_{i_s \in I_s} \exp(\gamma_{i_s})} - 1,
\end{aligned}
$$

Při této volbě je omezení na maximální škodní průběh (2) splněno ve střední hodnotě. Při praktickém odhadu jsou teoretické (neznámé) koeficienty nahrazeny odhady.

# Segmentační kritéria
## POV

Uvažujeme 60 tisíc smluv pojištění odpovědnost za škodu způsobenou provozem vozidla (povinné ručení). Následující kritéria jsou využita pro tvorbu multiplikativního sazebníku:

- **tarifní skupině** dle objemu motoru (TS): 5 kategorií (do 1000, do 1350, do 1850, do 2500, nad 2500 ccm) – hlavní kritérium pro základní sazby
- **stáří pojistníka** kategorizované (vek): 3 kategorie (18-30, 30-65, 65 a více)
- **region** kategorizované (region): 4 kategorie (nad 500 tisíc, nad 50 tisíc, nad 5 tisíc, do 5 tisíc obyvatel)
- **vznětový motor** (diesel): 2 kategorie (1 – ano, 2 – ne)

# Zobecněné lineární modely

## Odhady parametrů

| | | Overd. Poisson | | | Gamma | | | Inv. Gaussi | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Param. | Level | Est. | Std.Err. | **Exp** | Est. | Std.Err. | **Exp** | Est. | Std.Err. |
| TS | 1 | -3.096 | 0.042 | 0.045 | 10.30 | 0.015 | 29 778 | 10.30 | 0.017 |
| TS | 2 | -3.072 | 0.038 | 0.046 | 10.35 | 0.013 | 31 357 | 10.35 | 0.015 |
| TS | 3 | -2.999 | 0.037 | 0.050 | 10.46 | 0.013 | 34 913 | 10.46 | 0.015 |
| TS | 4 | -2.922 | 0.037 | 0.054 | 10.54 | 0.013 | 37 801 | 10.54 | 0.015 |
| TS | 5 | -2.785 | 0.040 | 0.062 | 10.71 | 0.014 | 44 666 | 10.71 | 0.017 |
| region | 1 | 0.579 | 0.033 | 1.785 | 0.21 | 0.014 | 1.234 | 0.21 | 0.016 |
| region | 2 | 0.460 | 0.031 | 1.583 | 0.11 | 0.013 | 1.121 | 0.11 | 0.014 |
| region | 3 | 0.205 | 0.032 | 1.228 | 0.06 | 0.013 | 1.059 | 0.06 | 0.015 |
| region | 4 | 0.000 | 0.000 | 1.000 | 0.00 | 0.000 | 1.000 | 0.00 | 0.000 |
| vek | 1 | 0.431 | 0.027 | 1.539 | - | - | - | - | - |
| vek | 2 | 0.245 | 0.024 | 1.277 | - | - | - | - | - |
| vek | 3 | 0.000 | 0.000 | 1.000 | - | - | - | - | - |
| diesel | 1 | -0.177 | 0.018 | 0.838 | - | - | - | - | - |
| diesel | 2 | 0.000 | 0.000 | 1.000 | - | - | - | - | - |
| Scale | | 0.647 | 0.000 | | 13.84 | 0.273 | | 0.002 | 0.000 |

# Multiplikativní sazebník

| | | **GLM** | | EV model | | SP model (ind.) | | SP model (kol.) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | G | IG | G | IG | G | IG | G | IG |
| TS | 1 | 1 880 | 1 879 | 3 805 | 3 801 | 9 318 | 14 952 | 4 400 | 5 305 |
| TS | 2 | 2 028 | 2 029 | 4 104 | 4 105 | 9 979 | 16 319 | 8 733 | 5 563 |
| TS | 3 | 2 430 | 2 431 | 4 918 | 4 918 | 11 704 | 19 790 | 5 547 | 6 296 |
| TS | 4 | 2 840 | 2 841 | 5 748 | 5 747 | 13 380 | 23 145 | 6 376 | 7 125 |
| TS | 5 | 3 850 | 3 851 | 7 792 | 7 791 | 17 453 | 31 718 | 8 421 | 9 169 |
| region | 1 | **2.203** | **2.201** | .311 | .390 | .407 | .552 | .463 | .407 |
| region | 2 | .775 | .776 | .057 | .121 | .177 | .264 | .226 | .195 |
| region | 3 | .301 | .299 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 |
| region | 4 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 |
| vek | 1 | .539 | .539 | .350 | .277 | .257 | .157 | .182 | .268 |
| vek | 2 | .277 | .277 | .121 | .060 | .105 | .031 | .015 | .107 |
| vek | 3 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 |
| diesel | 1 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 |
| diesel | 2 | .194 | .194 | .194 | .194 | .130 | .114 | .156 | .121 |

# Celková ztráta
## na smlouvě během jednoho roku

Úhrn škod (celková ztráta) na slouvě povinného ručení během jednoho roku může být složena následujícím způsobem:

$$L_I = (1 + vc_I)\left[(1 + inf_z)L_I^z + (1 + inf_m)L_I^m\right] + fc_I,$$

kde **škody na zdraví** $L_I^z$ a **škody na majetku** $L_I^m$ jsou modelovány odděleně, zohledňujeme odlišné **inflace** škod na zdraví $inf_z$ a na majetku $inf_m$, proporcionální $vc_I$ a fixní **náklady** $fc_I$.

# Optimalizační model

## Deterministický přístup

Pro stanovení multiplikativního sazebníku můžeme využít následující model minimalizující úhrn pojistného[1] při omezení na očekávané škodní průběhy a maximální přípustnou přirážku $r^{max}$:

$$\begin{aligned} \min \sum_{I \in \mathcal{I}} w_I Pr_{i_0}(1+e_{i_1}) \cdot \dots \cdot (1+e_{i_S}) & \\ \text{s.t.} & \\ \hat{LR} \cdot Pr_{i_0} \cdot (1+e_{i_1}) \cdot \dots \cdot (1+e_{i_S}) &\geq \mathbb{E}[L_{i_0,i_1,\dots,i_S}], \\ (1+e_{i_1}) \cdot \dots \cdot (1+e_{i_S}) &\leq 1 + r^{max}, \\ e_{i_1}, \dots, e_{i_S} &\geq 0, \ (i_0, i_1, \dots, i_S) \in \mathcal{I}. \end{aligned} \tag{4}$$

Problém je nelineární nekonvexní, tedy velice obtížně řešitelný.

[1] Minimalizace je vhodná ve vysoce konkurenčním prostředí.

# Optimalizační model

## Transformace

S využitím logaritmické transformace rozhodovacích proměnných $u_{i_0} = \ln(Pr_{i_0})$ a $u_{i_s} = \ln(1 + e_{i_s})$ a položíme-li

$$b_{i_0,i_1,\dots,i_S} = \ln(\mathbb{E}[L_{i_0,i_1,\dots,i_S}]/L\hat{R}),$$

můžeme úlohu přepsat jako problém s lineárními omezeními a konvexní účelovou funkcí, kterou snadno vyřešíme dostupnými optimalizačními softwary:

$$\begin{aligned}
\min \sum_{I \in \mathcal{I}} w_I e^{u_{i_0} + u_{i_1} + \dots + u_{i_S}} & \\
\text{s.t.} & \\
u_{i_0} + u_{i_1} + \dots + u_{i_S} &\geq b_{i_0,i_1,\dots,i_S}, \\
u_{i_1} + \dots + u_{i_S} &\leq \ln(1 + r^{max}), \\
u_{i_1}, \dots, u_{i_S} &\geq 0, \; (i_0, i_1, \dots, i_S) \in \mathcal{I}.
\end{aligned} \tag{5}$$

# Optimalizační model

## Ekvivalence úloh

Úlohy (4) and (5) jsou ekvivalentní v následujícím smyslu: $\hat{Pr}_{i_0}, \hat{e}_{i_1}, \ldots, \hat{e}_{i_S}$ je optimálním řešením úlohy (4) právě tehdy, když $\hat{u}_{i_0}, \hat{u}_{i_1}, \ldots, \hat{u}_{i_S}$ je optimálním řešením úlohy (5) a platí následující vztahy $\hat{u}_{i_0} = \ln(\hat{Pr}_{i_0})$ and $\hat{u}_{i_s} = \ln(1 + \hat{e}_{i_s})$. Všimněme si, že deterministický přístup nezávisí na expozici tarifních tříd.

# Optimalizační model
## Síť koeficientů

Předpokládáme, že jsou přirážkové koeficienty vybírány ze sítě hodnot. Pro zjednodušení předpokládáme, že je tato síť ekvidistantní. Nechť $r_s > 0$ značí krok, obvykle 0.1 or 0.05. Přirážku poté modelujeme jako

$$e_{i_s} = x_{i_s} \cdot r_s,$$

kde $x_{i_s} \in \{0, \ldots, J_s\}$ jsou celočíselné rozhodovací proměnné a $J_s = \lfloor r^{max}/r_s \rfloor$. Po logaritmické transformaci bychom získali obtížně řešitelnou úlohu. Proto využijeme jinou formulaci založenou na binárních proměnných, kde položíme

$$u_{i_s} = \sum_{j=0}^{J_s} y_{i_s,j} \ln(1 + j \cdot r_s),$$

spolu s podmínkou $\sum_{j=0}^{J_s} y_{i_s,j} = 1$, která zajistí, že vybereme právě jednu hodnotu přirážky.

# Stochastické programování
## Úlohy s náhodnou pravou stranou

Cílem je minimalizovat účelovou funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ za omezení

$$g_j(x) \geq \xi_j, \; j = 1, \ldots, m,$$

kde $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $\xi_j$ jsou reálné náhodné veličiny. Pravděpodobnostní omezení

$$P\left(g_j(x) \geq \xi_j\right) \geq 1 - \varepsilon, \; j = 1, \ldots, m,$$

můžou být přeformulovány pomocí kvantilové funkce jako

$$g_j(x) \geq F^{-1}_{\xi_j}(1 - \varepsilon), \; j = 1, \ldots, m.$$

# Optimalizační model – stochastický

## Individuální pravděpodobnostní omezení

Předepíšeme-li maximální pravděpodobnost $\varepsilon \in (0,1)$ pro porušení škodního průběhu v každé tarifní třídě, dostaneme následující pravděpodobnostní omezení

$$P\left(L^T_{i_0,i_1,\ldots,i_S} \leq \hat{LR} \cdot W_{i_0,i_1,\ldots,i_S} \cdot Pr_{i_0} \cdot (1+e_{i_1}) \cdot \dots \cdot (1+e_{i_S})\right) \geq 1-\varepsilon,$$

které snadno přepíšeme s využitím kvantilových funkcí jako

$$\hat{LR} \cdot W_{i_0,i_1,\ldots,i_S} \cdot Pr_{i_0} \cdot (1+e_{i_1}) \cdot \dots \cdot (1+e_{i_S}) \geq F^{-1}_{L^T_{i_0,i_1,\ldots,i_S}}(1-\varepsilon).$$

Položíme-li

$$b_I = \ln\left[\frac{F^{-1}_{L^T_I}(1-\varepsilon)}{W_I \cdot \hat{LR}}\right],$$

můžeme využít deterministickou formulaci (5).

# Optimalizační model – stochastický

## Čebyševova nerovnost

Je však velice obtížné spočíst přesné hodnoty kvantilů $F_{L_l^T}^{-1}$ pro složená rozdělení, Withers and Nadarajah (2011), a využití centrální limitní věty nemusí být vzhledem k výši expozice vhodné.

Čebyševova nerovnost pro $X \in \mathcal{L}_2$:

$$P\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}{\varepsilon^2},$$

případně pro $X \in \mathcal{L}_p$, $p \in \mathbb{N}$:

$$P\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^p]}{\varepsilon^p}.$$

**Jednostranná verze Čebyševovy nerovnosti** pro $X \in \mathcal{L}_2$:

$$P\left(X \geq \hat{LR}\right) \leq \frac{1}{1 + (\hat{LR} - \mu)^2/\sigma^2},$$

kde $\hat{LR} \geq \mu$.

# Optimalizační model – stochastický

## Spolehlivostní omezení

Namísto kvantilů můžeme využít jednostrannou Čebyševovu nerovnost založenou na střední hodnotě a rozptylu ztát, což vede na následující omezení

$$P\left(\frac{L_I^T}{TP_I} \geq \hat{LR}\right) \leq \frac{1}{1 + (\hat{LR} \cdot TP_I - \mu_I^T)^2/(\sigma_I^T)^2} \leq \varepsilon, \tag{6}$$

pro $\hat{LR} \cdot TP_I \geq \mu_I^T$.

# Optimalizační model – stochastický

## Spolehlivostní omezení

Chen et al. (2011) ukázali, že meze je dosaženo pro rozdělení s danou střední hodnotou $\mu_l^T$ a rozptylem $(\sigma_l^T)^2$, tj.

$$\sup_{\mathbb{E}[L_l^T]=\mu_l^T,\ var(L_l^T)=(\sigma_l^T)^2} P\left(L_l^T \geq \hat{LR} \cdot TP_l\right) = \frac{1}{1 + (\hat{LR} \cdot TP_l - \mu_l^T)^2/(\sigma_l^T)^2},$$

pro $\hat{LR} \cdot TP_l \geq \mu_l^T$. Omezení je tedy maximálně konzervativní a zajišťuje

$$\sup_{\mathcal{D}:\ \mathbb{E}[L_l^T]=\mu_l,\ var(L_l^T)=(\sigma_l^T)^2} P\left(L_l^T \geq \hat{LR} \cdot TP_l\right) \leq \varepsilon.$$

# Optimalizační model – stochastický

## Spolehlivostní omezení

Nerovnost (6) můžeme přepsat jako:

$$\mu_I^T + \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\sigma_I^T \leq \hat{LR} \cdot TP_I.$$

Po vydělení expozicí dostáváme výsledné omezení

$$\mu_I + \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\frac{\sigma_I}{\sqrt{W_I}} \leq \hat{LR} \cdot Pr_I. \tag{7}$$

Položíme-li

$$b_I = \ln\left[\left(\mu_I + \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon W_I}}\sigma_I\right) / \hat{LR}\right],$$

můžeme využít deterministickou formulaci (5) s příslušnou pravou stranou. V tomto případě je expozice tarifní třídy zohledněna.

# Kolektivní pravděpodobnostní omezení

V kolektivním modelu předepíšeme pravděpodobnost, s níž má pojistné pokrýt budoucí ztráty v celém kmeni (LoB):

$$P\left(\sum_{I\in\mathcal{I}} L_I^T \le \sum_{I\in\mathcal{I}} W_I Pr_I\right) \ge 1-\varepsilon.$$

# Optimalizační model – stochastický

Zaks et al. (2006) představili problém pro stanovení pojistného (bez multiplikativního efektu), kde minimalizují střední čtvercovou chybu za podmínek na celkové pojistné LoB s využitím centrální limitní věty:

$$\begin{aligned} &\min_{Pr_I} \sum_{I \in \mathcal{I}} \frac{1}{r_I} \mathbb{E}\left[ \left( L_I^T - W_I Pr_I \right)^2 \right] \\ &\text{s.t.} \\ &\sum_{I \in \mathcal{I}} W_I Pr_I = \sum_{I \in \mathcal{I}} W_I \mu_I + z_{1-\varepsilon} \sqrt{\sum_{I \in \mathcal{I}} W_I \sigma_I^2}, \end{aligned} \tag{8}$$

kde $r_I > 0$ a $z_{1-\varepsilon}$ značí kvantil standardního normálního rozdělení.

# Optimaliační model – stochastický

Dle Zaks et al. (2006), Theorem 1, má úloha jediné řešení

$$\hat{P}r_I = \mu_I + z_{1-\varepsilon}\frac{r_I \sigma}{rW_I},$$

kde $r = \sum_{I\in\mathcal{I}} r_I$ and $\sigma^2 = \sum_{I\in\mathcal{I}} W_I \sigma_I^2$. Tyto odhady pojistného můžeme opět využít v deterministickém modelu (5), položíme-li

$$b_I = \ln\left[\left(\mu_I + z_{1-\varepsilon}\frac{r_I \sigma}{rW_I}\right)/\hat{LR}\right].$$

Zaks et al. (2006) diskutovali odlišné volby $r_I$, například $r_I = 1$ nebo $r_I = W_I$ vedou k semi-rovnoměrnému a rovnoměrnému rozložení rizika.

# Obsah

# Segmentační kritéria
## POV

Uvažujeme 60 tisíc smluv pojištění odpovědnost za škodu způsobenou provozem vozidla (povinné ručení). Následující kritéria jsou využita pro tvorbu multiplikativního sazebníku:

- **tarifní skupině** dle objemu motoru (TS): 5 kategorií (do 1000, do 1350, do 1850, do 2500, nad 2500 ccm) – hlavní kritérium pro základní sazby
- **stáří pojistníka** kategorizované (vek): 3 kategorie (18-30, 30-65, 65 a více)
- **region** kategorizované (region): 4 kategorie (nad 500 tisíc, nad 50 tisíc, nad 5 tisíc, do 5 tisíc obyvatel)
- **vznětový motor** (diesel): 2 kategorie (1 – ano, 2 – ne)

# Software

SAS Enterprise Guide:

- SAS GENMOD procedure (SAS/STAT 9.3) – odhad zobecněných lineárncíh modelů
- SAS OPTMODEL procedure (SAS/OR 9.3) – optimalizace

# Odhady parametrů

| Param. | Level | Overd. Poisson Est. | Std.Err. | **Exp** | Gamma Est. | Std.Err. | **Exp** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| TS | 1 | -3.096 | 0.042 | 0.045 | 10.30 | 0.015 | 29 778 |
| TS | 2 | -3.072 | 0.038 | 0.046 | 10.35 | 0.013 | 31 357 |
| TS | 3 | -2.999 | 0.037 | 0.050 | 10.46 | 0.013 | 34 913 |
| TS | 4 | -2.922 | 0.037 | 0.054 | 10.54 | 0.013 | 37 801 |
| TS | 5 | -2.785 | 0.040 | 0.062 | 10.71 | 0.014 | 44 666 |
| region | 1 | 0.579 | 0.033 | 1.785 | 0.21 | 0.014 | 1.234 |
| region | 2 | 0.460 | 0.031 | 1.583 | 0.11 | 0.013 | 1.121 |
| region | 3 | 0.205 | 0.032 | 1.228 | 0.06 | 0.013 | 1.059 |
| region | 4 | 0.000 | 0.000 | 1.000 | 0.00 | 0.000 | 1.000 |
| vek | 1 | 0.431 | 0.027 | 1.539 | - | - | - |
| vek | 2 | 0.245 | 0.024 | 1.277 | - | - | - |
| vek | 3 | 0.000 | 0.000 | 1.000 | - | - | - |
| diesel | 1 | -0.177 | 0.018 | 0.838 | - | - | - |
| diesel | 2 | 0.000 | 0.000 | 1.000 | - | - | - |
| Scale | | 0.647 | 0.000 | | 13.84 | 0.273 | |

# Použité modely

- **GLM** – Postup založený na zobecněných lineárních modelech
- **EV model** – Deterministický model
- **SP model (ind.)** – Stochastický model s individuálními omezeními s $\varepsilon = 0.1$
- **SP model (kol.)** – Stochastický model s kolektivním omezením s $\varepsilon = 0.1$

# Multiplikativní sazebník

| | | GLM | | EV model | | SP model (ind.) | | SP model (kol.) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | G | IG | G | IG | G | IG | G | IG |
| TS | 1 | 1 880 | 1 879 | 3 805 | 3 801 | 9 318 | 14 952 | 4 400 | 5 305 |
| TS | 2 | 2 028 | 2 029 | 4 104 | 4 105 | 9 979 | 16 319 | 8 733 | 5 563 |
| TS | 3 | 2 430 | 2 431 | 4 918 | 4 918 | 11 704 | 19 790 | 5 547 | 6 296 |
| TS | 4 | 2 840 | 2 841 | 5 748 | 5 747 | 13 380 | 23 145 | 6 376 | 7 125 |
| TS | 5 | 3 850 | 3 851 | 7 792 | 7 791 | 17 453 | 31 718 | 8 421 | 9 169 |
| region | 1 | **2.203** | **2.201** | .311 | .390 | .407 | .552 | .463 | .407 |
| region | 2 | .775 | .776 | .057 | .121 | .177 | .264 | .226 | .195 |
| region | 3 | .301 | .299 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 |
| region | 4 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 |
| vek | 1 | .539 | .539 | .350 | .277 | .257 | .157 | .182 | .268 |
| vek | 2 | .277 | .277 | .121 | .060 | .105 | .031 | .015 | .107 |
| vek | 3 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 |
| diesel | 1 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 |
| diesel | 2 | .194 | .194 | .194 | .194 | .130 | .114 | .156 | .121 |

# Závěr a doporučení

- Zobecněné lineární modely a EV model – dobrý začátek
- Individuální model – vhodný pro méně segmentované sazebníky
- Kolektivní model – vhodný pro více segmentované sazebníky

# Obsah

# Reference


- M. Branda (2012). **Underwriting risk control in non-life insurance via generalized linear models and stochastic programming**. Proceedings of the 30th International Conference on Mathematical Methods in Economics 2012, J. Ramík, D. Stavárek eds., Silesian University in Opava, School of Business Administration in Karviná, 61–66.
- M. Branda (2013). **Optimization approaches to multiplicative tariff of rates estimation in non-life insurance**. Asia-Pacific Journal of Operational Research 31 (5), 1450032, 17 pages, 2014.
- L. Chen, S. He, S. Zhang (2011). **Tight bounds for some risk measures, with applications to robust portfolio selection**. Operations Research, 59(4), 847–865.
- E. Ohlsson, B. Johansson (2010). **Non-Life Insurance Pricing with Generalized Linear Models**. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Y.-K. Tse (2009). **Nonlife actuarial models: Theory, methods and evaluation**. Cambridge University Press, New York.
- Ch. Withers, S. Nadarajah (2011). **On the compound Poisson-gamma distribution**. Kybernetika 47(1), 15–37.
- Y. Zaks, E. Frostig, B. Levikson (2006). **Optimal pricing of a heterogeneous portfolio for a given risk level**. Astin Bulletin 36(1), 161–185.