

# Aplikace teoretických postupů pro ocenění rizika při upisování pojistných smluv v oblasti velkých rizik (2. fáze)

Zpracovali: **Ondřej Pavlačka, Lukáš Héža, Dagmar Martinková**

Katedry matematické analýzy a aplikací matematiky

Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci

**Projekt je finančně podporovaný Nadačním fondem pro podporu vzdělávání v pojišťovnictví.**

Výsledky byly prezentovány v Praze dne 25. listopadu 2011.

## Cíle projektu

Vytvořit matematický model pro oceňování přijímaného rizika z hlediska

- **očekávaného zisku,**
- **nákladu na kapitál.**

Model má umožnit v průběhu upisovacího roku sledovat, jak underwriteři nakládají s kapitálem:

- zda jimi zvolená cenová politika odpovídá požadované míře zhodnocení vloženého kapitálu,
- zda upisované rizikové portfolio nevybočuje z pravidel Solvency 2.

## Rámcová podoba matematického modelu

V rámci daného druhu pojištění si **pojistitel nastaví:**

- **velikost obchodních a provozních nákladů** (v % pojistného),
- **objem kapitálu** alokovaného na daný druh pojištění (VK),
- **požadovaný rating** = kolik % regulatorně požadovaného kapitálu (dle S2) má tvořit alokovaný kapitál,
- **požadovaný zisk** ( $ROE_{poz}$ ) = investory požadovaná hodnota očekávaného ROE (v % VK).

Dále si pojistitel definuje na základě vlastní analýzy **kategorie rizikovosti** přijímaných rizik z hlediska velikosti případné škody vzhledem k PML, a to na základě:

- **pojišťovaného průmyslového odvětví,**
- **dvou faktorů** (aktuální podoba modelu):

- a) četnosti výskytu škody,
- b) závažnosti případných škod – poměr vzniklé škody vzhledem k PML, resp. PČ.

Jednotlivým kategoriím rizikivosti přiřadí na základě historických dat rozdělení pravděpodobnosti škod na intervalu [0,1] (hodnoty představují poměr vzniklé škody ku PML).

Jednotlivá rizika z pojistitelem již uzavřených pojistných smluv se roztřídí do zavedených kategorií rizikivosti. U každé již uzavřené smlouvy se dále vezmou v potaz hodnoty **PČ** a **PML**, **sazby** a dohodnutá **spoluúčast**. Na základě těchto údajů **model odhadne aktuální hodnoty**:

- **RAC** ... regulatorně požadovaný kapitál (RAC – Risk Adjusted Capital) dle metodiky Solvency 2 se zahrnutým požadovaným ratingem na krytí jím upsaných pojistných smluv:

$$RAC = rating \cdot [Q_{0,995} - pojistne \cdot (1 - naklady)],$$

kde  $Q_{0,995}$  = **0,995-kvantil celkových plnění z daného souboru smluv v jednom roce**,

- **ROE** ... hodnotu očekávaného ROE v % z VK:

$$ROE = \frac{pojistne \cdot (1 - naklady) - prumerne plneni}{VK}$$

- **ŠP** ... očekávaný škodní poměr:

$$\text{ŠP} = \frac{\text{prumere plneni}}{\text{pojistne}}$$

Při upisování nové smlouvy underwriter rozdělí, pokud je to vhodné, přijímané riziko na několik dílčích rizik a ta pak zařadí do **předdefinovaných kategorií rizikivosti**. Dále underwriter zadá:

- **PML a pojistnou částku (PČ)** pro jednotlivá rizika,
- **sazby** (v promilích z PČ), za které by chtěl daná rizika upsat,
- **parametry spoluúčasti**.

Model pak umožní **přímo analyzovat**, jaký **vliv na aktuální hodnoty RAC, ROE a ŠP** bude mít upsání nové smlouvy s konkrétní sazbou a konkrétními parametry spoluúčasti. Underwriter si přitom může zkoušet různé parametry spoluúčasti a různě velké sazby, přičemž ihned uvidí změnu příslušných hodnot **RAC, ROE a ŠP**.

## Výsledek 1. fáze projektu

V 1. fázi projektu se podařilo zkonstruovat analytický model popisující situaci, kdy **všechny upisované smlouvy spadají do stejné kategorie rizikivosti, ale mají různé vysoké PČ** (pro jednoduchost se předpokládalo, že  $PČ = PML$ ). V modelu nebyla zahrnuta spoluúčast. Za

pomocí modelu šlo analyzovat, **jaký vliv má nehomogenost pojistných částek na jednotlivých smlouvách na výsledný RAC.**

Zvolená kategorie rizikovosti pojistných smluv mohla být v modelu reprezentována libovolným rozdělením pravděpodobnosti na intervalu [0,1]. Vždy však bylo nutné uvedeným způsobem založeným na simulacích spočítat parametry výsledných funkcí *RAC*, *ROE* a *ŠP*.

**Výhodou** užitého přístupu byla možnost okamžitého zobrazení nových hodnot *RAC*, *ROE* a *ŠP* (bez nutnosti provádět simulace). **Nevýhody** spočívaly především v nemožnosti kombinovat různě rizikové smlouvy, nastavení parametrů funkce *RAC* bylo navíc poměrně zdouhavé a při jakékoli změně v rozdělení škodovosti bylo nutné celý postup opakovat.

#### **Závěry plynoucí z analytického modelu:**

- Vzhledem k celkovému předepsanému pojistnému je nejvýhodnější, jsou-li všechny PČ přibližně stejně vysoké.
- Nárůst RAC je nejmenší v případě, že k několika smlouvám s velkou PČ se přidá pár smluv s malou PČ (záporná šikmost), dále následuje případ, kdy jsou PČ relativně symetricky rozptýlené (nulová šikmost), nejhorší je pak situace, kdy se ke spoustě smluv s malou PČ přidá smlouva s velkou PČ (kladná šikmost).
- Tento nárůst klesá s rostoucím počtem smluv.

## **2. fáze projektu**

V rámci 2. fáze projektu byl vytvořen **simulační matematický model** zpracovaný v **MS Excel**. Uživatel modelu má **nově možnost do modelu vložit:**

- **vlastní kategorizaci rizik**
- **vlastní data pojistného kmene** (počet smluv, jednotlivé pojistné částky, jednotlivé PML, pojistné sazby, zařazení jednotlivých smluv do rizikových kategorií, parametry spoluúčastí).

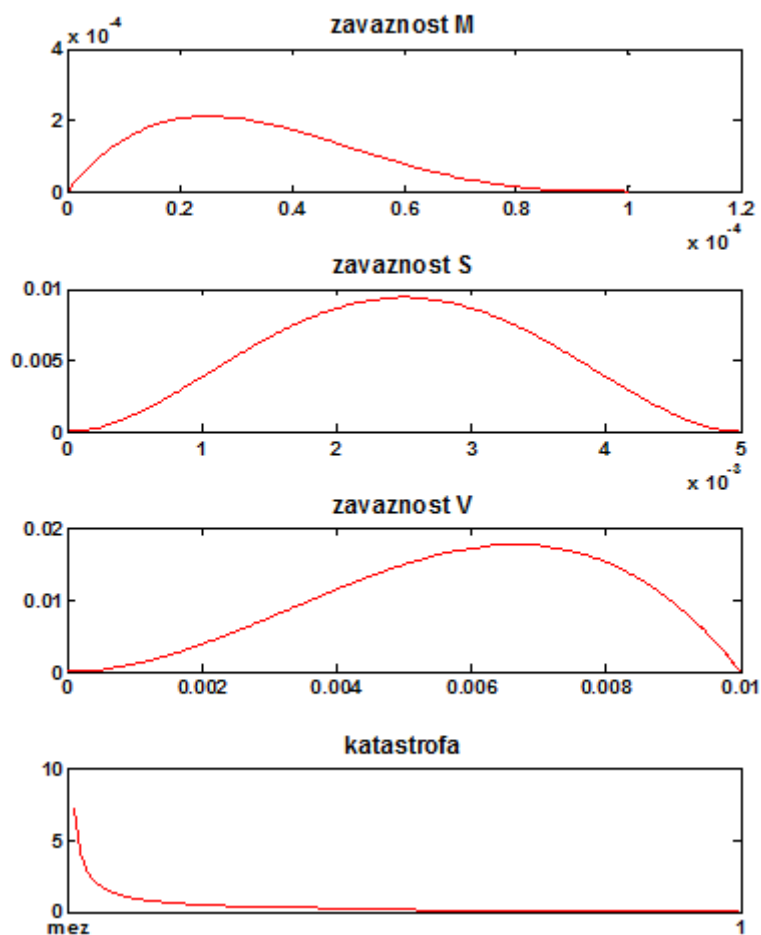
Provizorně je ve vypracovaném modelu nastaveno **9 rizikových kategorií** daných jako kombinace tří stupňů četnosti škod (pro jednoduchost nazvané malá "M", střední "S" a velká "V") a tří stupňů závažnosti škod (opět malá "M", střední "S" a velká "V"). Tato kategorizace a použitá rozdělení pravděpodobnosti pro modelování jednotlivých stupňů četnosti i závažnosti škod jsou čistě ilustrativní.

Stupně četnosti škod jsou modelované Poissonovým rozdělením s třemi různými parametry. Vygenerované hodnoty představují **počet škod nastalých během jednoho roku**.

Pro modelování rozdělení pravděpodobnosti třech stupňů závažnosti případných škod byl zvolen následující postup: Hodnoty závažnosti škod jsou z intervalu [0,1] a představují **hodnotu podílu výše škody na velikosti PML (popř. PČ) daného rizika**. Pro každý stupeň byla zvolena maximální hodnota typického rozsahu podílu škody na PML (dále označená jako *mez*) a pravděpodobnost, s jakou bude tato mez překročena:

Stupeň závažnosti	mez	pravděpodobnost překročení meze
M	0,0001	0,027
S	0,005	0,035
V	0,01	0,05

Překročení meze je pak bráno jako katastrofická událost pro dané riziko (i když daná škoda ve skutečnosti pro pojišťovnu nemusí znamenat realizaci katastrofy). Pro typickou závažnost škody u jednotlivých stupňů závažnosti a pro katastrofickou událost pak byly zvoleny následující rozdělení pravděpodobnosti (beta rozdělení s modifikovanými mezemi):



Při generování celkové výše škod z daného rizika se nejprve vygeneruje počet škod na základě zvoleného stupně četnosti škod, výše jednotlivých škod je pak v závislosti na stupni závažnosti určena tak, že se nejprve zjistí, zda je daná škoda typická či zda se jedná o katastrofickou událost, a poté se vygeneruje z příslušného rozdělení hodnota podílu škody na PML, která se vynásobí hodnotou PML. Není-li PML zadáno, bere se jako PML hodnota pojistné částky.

Práci s modelem si nyní ilustrujeme na modelovém příkladu. Model má 3 listy – "Model", "Pojistný kmen" a "Scénáře". První list vypadá následovně:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	
1															
2	<b>Vstupní parametry</b>					PČ	PML	rizikovost - četnost	rizikovost - škoda	poj. sazba	<b>pojistné</b>	spoluúčast	spoluúčast %	MIN	MAX
3	vlastní kapitál	30 000 000													
4	rating	150%													
5	náklady	25%													
6	požadovaný ROE	6%													
7		Současný	Nový												
8	Počet smluv	25													
9															
10	<b>Výsledné hodnoty</b>	Současné	Nové												
11	předepsané pojistné	461 500													
12	RAC	5 493 092													
13	Zbývající kapitál	24 506 908													
14	oč. škodní poměr	35,14%													
15	očekávané ROE z VK	0,61%													
16	očekávané ROE z RAC	3,35%													
17	# smluv na pož. ROE	245													
18	RAC/pojistné	1190,3%													
19															
20															
21	<b>Výpočty</b>	Současné	Nové												
22	Q_0,995	4 008 187													
23	Průměrné plnění	162 166													
24	Počet scénářů	20 000													
25															
26	<b>Simulace nové smlouvy</b>														
27															
28	<b>Neuzavřít</b>	<b>Uzavřít smlouvu</b>													
29															
30															
31	<b>Simulace pojistného kmene</b>		<b>Restart</b>												
32															

Nalezneme na něm:

- vstupní parametry zadané uživatelem

Vstupní parametry	
vlastní kapitál	30 000 000
rating	150%
náklady	25%
požadovaný ROE	6%

- napravo prostor pro parametry nově upisované smlouvy

Nová pojistná smlouva														
PČ	PML	rizikovost - četnost	rizikovost - škoda	poj. sazba	<b>pojistné</b>	spoluúčast	spoluúčast %	MIN	MAX					

- aktuální hodnoty jednotlivých charakteristik vypočtené ze zadaného pojistného kmene a volná políčka pro jejich nové hodnoty v případě upsání navrhované smlouvy

	Současný	Nový
Počet smluv	25	
<b>Výsledné hodnoty</b>	<b>Současné</b>	<b>Nové</b>
předepsané pojistné	461 500	
RAC	5 493 092	
Zbývající kapitál	24 506 908	
oč. škodní poměr	35,14%	
očekávané ROE z VK	0,61%	
očekávané ROE z RAC	3,35%	
# smluv na pož. ROE	245	
RAC/pojistné	1190,3%	

- pro lepší představu o očekávaném zhodnocení alokovaného kapitálu ukazuje model kromě hodnoty očekávaného zhodnocení vlastního kapitálu (očekávané ROE z VK) i očekávané zhodnocení již spotřebovaného kapitálu (očekávané ROE z RAC),
- ukazatel "# smluv na pož. ROE" ukazuje odhad, kolik smluv by ještě ve stejném duchu jako dosud musel upisovatel upsat, aby se mu povedlo zhodnotit vlastní kapitál požadovaným výnosem,
- možnost nastavení počtu scénářů v simulacích a ovládací tlačítka



Na listu "Pojistný kmen" nalezneme data již uzavřených pojistných smluv:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Číslo pojistné smlouvy	PČ	PML	rizikovitost četnost	rizikovitost škoda	poj. sazba v promilích z PČ	pojistné	spoluúčast	spoluúčast %	MIN	MAX
2	1	9 000 000	4 500 000	V	M	0,6	5 400	10 000			
3	2	9 000 000		M	V	1,2	10 800	30 000			
4	3	5 000 000		S	S	0,7	3 500		5		
5	4	12 000 000		V	M	0,3	3 600		10	10 000	
6	5	15 000 000	6 000 000	M	S	0,2	3 000	50 000			
7	6	5 000 000		M	V	1,3	6 500				
8	7	5 000 000		V	M	0,6	3 000		10	10 000	
9	8	11 000 000		M	M	0,2	2 200		5	10 000	50 000
10	9	7 000 000		S	M	0,5	3 500		5	10 000	
11	10	11 000 000		V	S	1,5	16 500	25 000			
12	11	16 000 000		M	M	0,2	3 200		10	10 000	50 000
13	12	14 000 000	8 000 000	M	V	0,8	11 200		10	20 000	
14	13	6 000 000		V	M	0,7	4 200	30 000			
15	14	15 000 000		M	M	0,3	4 500				
16	15	16 000 000	5 000 000	M	M	0,3	4 800		10	20 000	
17	16	10 000 000	6 000 000	V	S	1,5	15 000				
18	17	14 000 000		M	M	0,3	4 200				
19	18	10 000 000		M	M	0,15	1 500		5	10 000	
20	19	16 000 000	8 000 000	V	V	2,6	41 600	20 000			
21	20	10 000 000		M	S	0,6	6 000	50 000			
22	21	8 000 000		S	M	0,6	4 800				
23	22	10 000 000		M	M	0,2	2 000		5	10 000	
24	23	160 000 000	80 000 000	M	V	1,1	176 000	100 000			
25	24	240 000 000		M	M	0,3	72 000		10	25 000	1 000 000
26	25	75 000 000	60 000 000	V	M	0,7	52 500				
27											
28											
29											

Po kliknutí na šedé tlačítko "Simulace pojistného kmene" se provede simulace – vygeneruje se zadaný počet scénářů představujících souhrn pojistných plnění za 1 rok (hodnoty se zobrazí

na poslední list "Scénáře" pro možnost případné další statistické analýzy) a přepíše současné hodnoty jednotlivých ukazatelů. Černé tlačítko "Restart" pak smaže data pojistného kmene a vynuluje současné hodnoty ukazatelů.

### Upisování nové smlouvy:

Při upisování nové pojistné smlouvy zadá underwriter pojistnou částku, případnou hodnotu PML a zvolí stupeň četnosti škod a závažnosti škod. Poté klikne na tlačítko "Simulace nové smlouvy", model provede simulaci škod – vygeneruje na list "Scénáře" hodnoty scénářů celkových škod z nové smlouvy a spočítá nové hodnoty ukazatelů. Následně si může nastavovat pojistnou sazbu (v promilích z PČ) a případné parametry spoluúčasti, model už bude automaticky (bez provádění simulací) přepočítávat nové hodnoty jednotlivých ukazatelů.

Nová pojistná smlouva										
PČ	PML	rizikovost - četnost	rizikovost - škoda	poj. sazba	pojistné	spoluúčast	spoluúčast %	MIN	MAX	
25 000 000		M	V	0,95	23 750					
50 000 000	35 000 000	V	S	0,8	40 000					

	Současný	Nový
Počet smluv	25	26
<b>Výsledné hodnoty</b>	<b>Současné</b>	<b>Nové</b>
předepsané pojistné	461 500	525 250
RAC	5 493 092	7 421 043
Zbývající kapitál	24 506 908	22 578 957
oč. škodní poměr	35,14%	39,77%
očekávané ROE z VK	0,61%	0,62%
očekávané ROE z RAC	3,35%	2,49%
# smluv na pož. ROE	245	253
RAC/pojistné	1190,3%	1412,9%

Nová pojistná smlouva										
PČ	PML	rizikovost - četnost	rizikovost - škoda	poj. sazba	pojistné	spoluúčast	spoluúčast %	MIN	MAX	
25 000 000		M	V	0,95	23 750	100 000				
50 000 000	35 000 000	V	S	0,8	40 000		5	50 000	250 000	

Výsledné hodnoty	Současné	Nové
předepsané pojistné	461 500	525 250
RAC	5 493 092	7 311 097
Zbývající kapitál	24 506 908	22 688 903
oč. škodní poměr	35,14%	36,95%
očekávané ROE z VK	0,61%	0,67%
očekávané ROE z RAC	3,35%	2,73%
# smluv na pož. ROE	245	234
RAC/pojistné	1190,3%	1391,9%

Jestliže se rozhodne pojistnou smlouvu uzavřít, klikne na zelené tlačítko "Uzavřít smlouvu", model pak převede danou pojistnou smlouvu na list "Pojistný kmen" a přepíše "Současné hodnoty ukazatelů" novými, přičemž ta políčka pro nové hodnoty smaže.

25	75 000 000	60 000 000	V	M	0,7	52 500				
26	25 000 000		M	V	0,95	23 750	100 000			
26	50 000 000	35 000 000	V	S	0,8	40 000		5	50 000	250 000

Pokud underwriter klikne na tlačítko "Neuzavřít", navrhované parametry nové smlouvy a nové hodnoty ukazatelů se vymažou, stejně tak jako hodnoty scénářů škod z nové smlouvy na listu "Scénáře".

Do modelu lze případně snadno implementovat i vlastní schéma zajištění. Nedořešený je zatím problém s ukazatelem dosažení požadovaného ROE z vlastního kapitálu. Na upsání uvedeného počtu průměrných smluv totiž nemusí stačit kapitál.

Na následujících dvou příkladech jsou ilustrovány dvě skutečnosti související se zavedením Solvency 2, na které bychom rádi upozornili.

## 1. příklad

První příklad má upozornit na skutečnost, že po zavedení Solvency 2 bude při hodnocení rizikovitosti pojistných kmenů výrazně záviset na homogenitě pojistných částek (resp. PML).

Pro ukázkou byly vytvořeny tři fiktivní pojistné kmene (PK1, PK2, PK3), které sice přinášejí stejnou ziskovost (stejně očekávané ROE) a pojišťovně z nich vyplývá nárok na stejné pojistné, ale výrazně se liší svou rizikovitostí. Každý kmen obsahuje 100 pojistných smluv, průměrná pojistná částka (PČ) činí vždy 45 mil. Kč. Předepsané pojistné pro každý kmen je 8 100 000 Kč.

První pojistný kmen (PK1) je charakteristický stejnou pojistnou částkou (45 mil. Kč) pro každou smlouvu, přičemž všechny smlouvy mají rizikové kategorie S+S (střední četnost, střední závažnost). Druhý pojistný kmen se skládá ze smluv, jejichž pojistná částka se pohybuje od 10 mil. Kč až po 80 mil. Kč. Rizikové kategorie jsou zde pro jednotlivé smlouvy různé (např. M+S, V+M, S+S,...). Třetí pojistný kmen obsahuje pojistné smlouvy, které se velmi liší svou PČ. U většiny smluv se PČ se pohybuje v řádech milionů. Na druhou stranu jsou zde také pojistné smlouvy s PČ v řádech stovek milionů, dokonce i s miliardovou PČ. Opět se zde objevují různé kombinace kategorií rizik.

Takto zkonstruované kmene jsme nechali simulovat. Pojistitelem volitelné parametry náklady, rating a požadované ROE jsme nechali na úrovni z předchozího popisu modelu, vlastní kapitál byl nastaven na 55 mil Kč. Podle očekávání vyšel nejmenší spotřebovaný kapitál u PK1, který je homogenní. PK2 "prochází" požadavkem na kapitál jen těsně. Třetí pojistný kmen pak velmi překračuje kapitálové požadavky.

Dále jsme zkoumali vliv volby kategorií rizikovitosti na rizikovost celého kmene. Zatím se zdá, že vliv volby rizikových kategorií pro jednotlivé smlouvy má mnohem menší význam na celkovou rizikovost kmene než homogenost PČ pojistného kmene. Jako příklad zde uvádíme výsledné hodnoty pro pojistný kmen sestávající se ze stejných smluv jako PK1, ale



s rozdílnými kombinacemi kategorií rizik (M+M až V+V), viz poslední sloupec „1. Pojistný kmen B“ v tabulce.

	vlastní kapitál		průměrná PČ	
	55 000 000		45 000 000	
Výsledné hodnoty	1. pojistný kmen	2. pojistný kmen	3. pojistný kmen	1. pojistný kmen B
předepsané pojistné	8 100 000	8 100 000	8 100 000	8 095 545
RAC	43 734 708	51 649 594	78 537 397	44 382 892
Zbývající kapitál	11 265 292	3 350 406	-23 537 397	10 617 108
oč. škodní poměr	34,32%	34,41%	34,07%	33,91%
očekávané ROE	5,992%	5,977%	6,027%	6,048%
očekávané ROE z RAC	7,5%	6,4%	4,2%	7,5%
počet smluv na ROE_poz	100	100	100	100
RAC/pojistné	539,9%	637,6%	969,6%	548,2%

## 2. příklad

V rámci druhého příkladu bychom chtěli upozornit na to, jaký problém může přinést skutečnost, že v konceptu Solvency 2 uvažovaná míra rizika, tedy kritérium měření rizikovitosti pojistného kmene, tzv. *Value At Risk* (VaR), nesplňuje jednu z podmínek koherentnosti měř rizika, tzv. *subaditivitu*. Subaditivita míry rizika spočívá v tom, že sloučíme-li dohromady dvě riziková portfolia, pak celková míra rizika nebude větší jak součet měř rizik jednotlivých dílčích portfolií.

Předpokládejme, že pojistitel rozdělil kapitál ve výši 80 mil. Kč mezi tři undewritery, oproti kterému mohou upisovat smlouvy. Na první dva připadlo 25 mil. Kč, třetí měl k dispozici 30 mil. Kč. První dva undewriteri upsali 15 pojistných smluv, třetí upsal 20 pojistných smluv. Parametry nastavitelné pojistitelem (sazby nákladů, rating a očekávané zhodnocení) jsou na stejné úrovni jako v modelovém příkladu výše. Pojistné částky na jednotlivých smlouvách (pro jednoduchost budeme předpokládat, že pojistná částka je rovna PML) se u každého underwritera pohybují v rozmezí 10 – 50 mil. Kč, každý underwriter však upsal tři smlouvy, u nichž byla pojistná částka řádově vyšší, v rozmezí 500 – 800 mil. Kč. Sazby a parametry spoluúčasti volili jednotliví underwriteři tak, aby splnili kritérium 6 % očekávaného zhodnocení kapitálu.

V následující tabulce jsou uvedeny výsledné hodnoty jak pro jednotlivé undewritery zvlášť, tak i pro jimi vytvořený celkový pojistný kmen. Snadno můžeme vidět, že **pojistné kmene jednotlivých undewriterů by vyhovovali požadavkům na kapitál** (dokonce jim přidělený kapitál ani celý nespotebovali), **na krytí souhrnného pojistného kmene by však pojistitel potřeboval cca 128 mil. Kč**, tedy výrazně více než alokovaných 80 mil. Kč.

	Underwriter 1	Underwriter 2	Underwriter 3	Spolu
<b>Vlastní kapitál</b>	<b>25 000 000</b>	<b>25 000 000</b>	<b>30 000 000</b>	<b>80 000 000</b>
<b>Počet smluv</b>	<b>15</b>	<b>15</b>	<b>20</b>	<b>50</b>
<b>předepsané pojistné</b>	<b>3 118 582</b>	<b>3 492 140</b>	<b>4 273 770</b>	<b>10 884 492</b>
<b>RAC</b>	<b>20 771 955</b>	<b>19 380 503</b>	<b>24 725 791</b>	<b>127 901 213</b>
<b>Zbývající kapitál</b>	<b>4 228 045</b>	<b>5 619 497</b>	<b>5 274 209</b>	<b>-47 901 213</b>
<b>oč. škodní poměr</b>	<b>31,85%</b>	<b>31,82%</b>	<b>23,33%</b>	<b>28,42%</b>
<b>očekávané ROE</b>	<b>5,4%</b>	<b>6,0%</b>	<b>7,4%</b>	<b>6,3%</b>
<b>očekávané ROE z RAC</b>	<b>6,5%</b>	<b>7,8%</b>	<b>8,9%</b>	<b>4,0%</b>
<b>počet smluv na ROE_poz</b>	<b>17</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	<b>47</b>
<b>RAC/pojistné</b>	<b>666,1%</b>	<b>555,0%</b>	<b>578,5%</b>	<b>1175,1%</b>