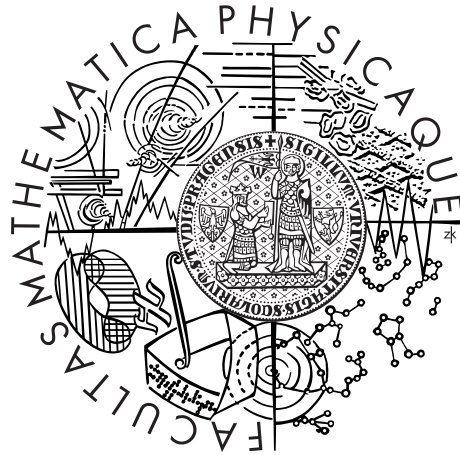


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta
Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky



Ekonomické scénáře v pojišřovnictví

Autor: Bc. Daniel Krýcha
Vedoucí projektu: RNDr. Martin Branda, Ph.D.

Projekt modelace rent v povinném ručení

v rámci grantu

Fondu pro podporu vzdělávání v pojišřovnictví

Praha 2011

Obsah

Úvod	2
Modely úrokových měř	3
Cíle	4
1 Vybrané modely úrokových měř	7
1.1 Drift	7
1.2 Volatilita	9
1.3 Vašíčkův model	10
1.4 CIR model	12
1.5 CKLS model	15
2 Kalibrace	16
2.1 Metoda nejmenších čtverců	16
2.2 Metoda maximální věrohodnosti	17
2.3 Obecná momentová metoda	17
3 Implementace	19
3.1 Metoda nejmenších čtverců	19
3.2 Metoda maximální věrohodnosti	24
3.3 Obecná momentová metoda	27
Závěr	30
Seznam použité literatury	31
Seznam tabulek	32

Úvod

Životní a neživotní pojištění fungují na odlišných principech a to se odráží na vývoji vztahu mezi nimi v poslední dekádě. Univerzální pojišťovny již dále nemohou vznikat a ty stávající tato dvě zaměření striktně oddělují, ať už z pohledu účetního, či z hlediska organizační struktury. Renty (neboli důchody) jsou však specifickým produktem, který se vyskytuje na průniku obou těchto typů pojištění. Ačkoliv primárně životní důchody řadíme do pojištění životního (a jen tam se také vyskytují v podobě hlavního produktu), zejména kvůli aktuárským metodám jejich ocenění, které vycházejí z matematických aparátů typických pro životní pojištění, přesto se s potřebou jejich ocenění a přeceňování setkáváme i v neživotním pojištění. Tam s nimi přicházíme do styku především v kontextu pojištění odpovědnosti, jako je např. povinné ručení.

Pro odhad současné hodnoty důchodu hrají v běžném konceptu hlavní roli dva determinující ukazatele: úmrtnostní tabulky a výnosové křivky (často redukovány do konstantní technické úrokové míry). Pojišťovny, které ve svém portfoliu drží starší živé životní pojistky, mají díky současnému vývoji možnost poznat, jak rozhodný vliv má dlouhodobý vývoj obou těchto fenoménů na skutečně realizovaný profit margin. Vliv prodlužování věku na úmrtnostní tabulky a dramatický pokles technické úrokové míry (který pochopitelně kopíruje světový makroekonomický vývoj) mají pro pojišťovnu vesměs negativní důsledky. To motivuje aktuary k rozvoji a používání demografických a ekonomických modelů, které by mimo jiné produkovaly scénáře, na jejichž základě se dá přistoupit k ocenění závazků s hlubším porozuměním. Vzhledem k zaměření této práce nás budou zajímat právě ekonomické modely a scénáře a jejich aplikace v pojišťovnictví.

Není to však pouhá vnitřní motivace, která nás vede k sofistikovaným generátorům ekonomických scénářů. Jeden z nejambicióznějších globálních projektů v současném pojišťovnictví, Solvency II, jehož implementace patří do konce roku 2012 k hlavním cílům mnoha oddělení pojistné matematiky, podněcuje potřebu těchto modelů hned v několika bodech [2]. První, možná trochu ošemetný, klade zvýšené požadavky na vyšší management, ve smyslu pochopení používaných modelů a jejich výstupů. Ačkoliv naplnit tento cíl na 100% je prakticky neuskutečnitelné, dá se však dosáhnout alespoň empirického pochopení principů fungování modelu, ale pouze za předpokladu, že jím není pomyslný black box přejímaný od třetí strany. Nicméně praxe zmíněného black boxu je v našich pojišťovnách poměrně běžná, ať už ve formě přímého přebírání externě připravených scénářů, nebo použití hotových generátorů scénářů, u kterých lze případně nastavit strukturální parametry a vytvořit si scénáře vlastní, ale bez přesnější znalosti vnitřního mechanismu. To rozhodně neznamená, že je tento přístup nějakým způsobem zavrženímhodný. Málomterá pojišťovna je personálně vybavena na to, aby vyvinula vlastní modely srovnatelné těmi, které lze pořídit od společností, které se na tuto tematiku specializují. Proniknutí do těchto generátorů ale slibuje jednoduše vhodnou aplikaci při stanovování solvenčního kapitálového požadavku (SCR), dále pak prevenci proti dezinterpretacím při používání převzatých generátorů. To představuje další uplatnění v kontextu Solvency II. V neposlední řadě je možné zmínit ještě součást prvního pilíře tohoto projektu, kde vzniká požadavek na trž-

ně konzistentní ocenění aktiv a závazků. I toho lze dosáhnout vhodným užitím generátoru ekonomických scénářů.

Modely úrokových měř

Do ekonomických scénářů lze zahrnout široké spektrum hospodářských ukazatelů, od inflace po kreditní riziko. Zcela nejdůležitější částí každého takového generátoru je však model úrokové míry. V životním pojištění je zohlednění časové hodnoty peněz jednou ze zásad jak principiálních, tak již i institucionálních (řeč je o IFRS 4). Úroková míra (bezriziková) primárně závisí na dvou faktorech: délce období, na které se vztahuje, a na čase. Zatímco pro mnoho aktuárských instrumentů postačí, či je přímo vhodnější použít trivializující přístup s konstantním pojetím úrokové míry, konstrukce modelů úrokových měř se naopak zakládá na zachycení dynamiky úrokové míry v čase. Vzhledem k tomu, že pro ocenění závazků se ve velké míře v praxi setkáváme s cash-flow modely, není při implementaci problém použít třeba i celé sady forwardových úrokových křivek. Důležitějším výstupem těchto modelů však pro nás bude v této práci predikce úrokové míry v krátkodobém i dlouhodobém horizontu a odhad jejího rozdělení pomocí simulací typu Monte Carlo.

Stochastický přístup k modelování úrokové míry není na poli ekonomické teorie novinkou, slavné modely, o kterých bude tato práce jednat, jsou veřejnosti známy již desítky let. I Black-Scholesův model, jeden ze základních instrumentů oceňování finančních derivátů, který ve své základní verzi počítá s konstantní úrokovou mírou, byl dále rozšířen na úrokové míry závislé na čase (modelované stochasticky), bez čehož by nebylo možné ocenit např. opce na úrokové míry [2]. Není překvapivé, že z modelů úrokových měř se často staly populární právě ty, na kterých lze snadno provést nadstavbu Black-Scholesova modelu.

Pro lepší představu o modelech úrokových měř si je rozdělme do několika základních kategorií (vzhledem k tomu, že většina dostupné odborné literatury je v angličtině, budeme uvádět i anglickou terminologii) [2, 4]:

- Modely okamžité spotové úrokové míry (Short Rate Models)
 - Jednofaktorové modely
př. Vašíčkův, CIR, CKLS
 - Vícefaktorové modely
př. dvoufaktorový Hull-Whiteův model
- Modely okamžité forwardové úrokové míry (Forward Rate Models)
př. HJM
- Tržní modely (Market Models)
 - Tržní LIBOR model (LIBOR Market Model)
 - Tržní swapový model (Swap Market Model)

V této práci nás budou zajímat modely okamžité spotové úrokové míry. Okamžitá úroková míra, v angličtině označována jako short rate (popř. výstižněji

instantaneous interest rate [12]), je chápána jako úroková míra vztahující se na infinitezimální časový okamžik. S její nevýhodou, totiž že není přímo pozorovatelná na trhu, se většinou vypořádáme tak, že vezmeme jednodenní úrokovou míru (overnight) jako dostatečnou aproximaci. Svojí povahou se pak okamžitá úroková míra perfektně hodí pro modelování prostřednictvím diferenciálních rovnic. Ke stochastickým diferenciálním rovnicím nás vede i to, že se úroková míra chová konceptuálně stejně, jako např. cena obligace nebo měnové kurzy, u nichž se tento přístup úspěšně používá [3]. Výsledné aplikace pak používáme i na úrokové míry platné po delší časová období. U této třídy modelů máme dále na výběr mezi jedno a vícefaktorovými modely. Faktorem je zde myšlen zdroj nejistoty (source of uncertainty), modelován pomocí spojitého Wienerova procesu (Brownův pohyb). Obecně platí, že vícefaktorové modely poskytují větší volnost v počtu modelovaných jevů (např. oddělené modelování volatility či rovnovážné hodnoty, více zdrojů nejistoty ovlivňující vývoj úrokové míry), je u nich však třeba dbát zvýšené pozornosti na praktické uplatnění a jednoduchost kalibrace. Jiné možné dělení rozlišuje rozlišuje modely okamžité spotové úrokové míry na rovnovážné (equilibrium) a bezarbitrážní (no-arbitrage) [12]. První zmiňované jsou založeny na praktickém předpokladu dlouhodobé rovnováhy, speciálně návratu ke střední hodnotě (mean-reversion), modelované pomocí driftového faktoru. Nevýhoda, která se s nimi pojí je, že není možné je nakalibrovat na právě pozorovanou úrokovou křivku - ta je totiž jejich výstupem, nikoliv vstupem (tzv. endogenní vlastnost ekvilibriálních modelů [3]). U bezarbitrážních modelů je tomu naopak. Dosahují toho tím, že driftovou složku modelují závislou na čase (např. variabilní rovnovážnou hodnotou jako u vícefaktorových modelů). Je možné tyto modely stavět rozšířením modelů ekvilibria.

Jednou z kritik stávajících short rate modelů je omezená možnost volby (křivky) volatility, která je v moderních prostředcích finančního modelování (jako jsou např. modely ARCH, GARCH) považována za klíčovou. Další nevýhodou je nejasné uchopení kovarianční struktury forwardových úrokových sazeb. Na tyto stimuly reagují modely, které si jako fundamentální jednotku pro modelování berou okamžitou forwardovou úrokovou sazbu [4]. Tyto modely sledují stochastický vývoj celé úrokové křivky, jsou však výpočetně velice náročné a hodí se spíše pro výzkumné účely než rutinní oceňování [12].

Nevýhodou obou dosud zmíněných tříd je již zmíněná nemožnost pozorovat okamžitou (ať už spotové či forwardové) úrokové míry na trhu. Napravit se to snaží třetí zmíněná třída, market modely. LIBOR market model (LMM) používá prostředky forwardových měr, které jsou kótovány na trhu (jde aplikovat i na jiné sazby než LIBOR). Na podobném principu funguje tržní swapový model, který místo capů, které jsou oceňovány v LMM, oceňuje swapce. Ani tyto modely se však neobejdou bez jistých komplikací [4].

Cíle

Klíčovým modelem naší práce bude jednofaktorový ekvilibriální model okamžité spotové úrokové míry CIR (Cox-Ingersoll-Rossův), o jehož zavedení a vlastnostech pojednává první kapitola.

Než se pustíme do teoretického rozboru a aplikací, je vhodné vytyčit si cíle a očekávání, které klademe na výsledky této práce. Prvotní otázkou je, jaké

všechny vlastnosti dynamiky úrokové míry chceme modelovat. Jako logická se jeví vlastnost návratu k rovnovážné hodnotě (mean-reversion), která se u velké části short rate modelů objevuje. Jakým způsobem toho ve stochastické struktuře modelu docílíme bude vidět v následujících partiích. Jiný jev, který je možné pozorovat ve spojitém vývoji úrokových křivek, jsou skokové pohyby. Modely (jump-diffusion), které se snaží je zapracovat (např. přidáním Poissonova procesu a veličiny určující výši skoku) však mohou zkreslovat dlouhodobý vývoj, který je pro nás důležitý. Efekt skoků tedy zohledníme pouze v parametru volatility. Volatilita jako určující míra zdroje nejistoty je naopak nedílnou součástí úrokové dynamiky, u které nepanuje názorová shoda na přesné vyjádření v modelu. Zmíněný CIR model používá volatilitu závislou na odmocnině aktuální výše úrokové míry, což jak uvidíme dodává modelu několik přirozených vlastností. Vzhledem k účelu modelu, kterým je zejména praktické použití a implementace, se omezíme na jeden zdroj nejistoty (jednofaktorový model).

Máme-li rozmyšleno jaké vlastnosti bude námi použitý model mít, můžeme se ptát, zda takový model splňuje požadavky, které na něj klademe. Vzhledem k tomu, že nás zajímají především budoucí úrokové míry, bude stabilita predikce jednou z priorit při testování modelu. Důraz přitom bude kladen jak na krátkodobou, tak dlouhodobou predikci budoucích sazeb. Přitom se neomezujeme pouze na užší výsledky jako je bodová predikce (dokonce žádný z dosud prezentovaných modelů nedokáže odpovídajícím způsobem přinést konzistentní, korektní a praktickou předpověď [9]), naopak nás zajímají realistické scénáře, které kromě střední očekávané hodnoty přinášejí i informaci typu *worst-case* a *best case scenario*, tedy intervalové odhady založené na Monte Carlo simulacích.

S tím je spjat požadavek na racionální výpočetní obtížnost. Ačkoliv dnešní výpočetní technika již dokáže robustní výpočty, které byly v době objevení většiny zde zmíněných modelů nemyslitelné, přesto zůstává výpočetní doba natolik limitujícím faktorem, že mnoho složitějších modelů současnosti právě kvůli ní troskotá na poli praktického využití. Klíčovou roli hraje kalibrace modelu. Vede-li metoda kalibrace na úlohu řešitelnou algoritmem obsahujícím iterativní metodou (jako je třeba maximalizace složité nelineární funkce, což je v praxi velice časté), je časová složitost při potřebě vyššího počtu kalibračních nezanedbatelná. Různé implementační metody kalibrace, které lze použít na odhady parametrů u modelů úrokových měr obecně, ale budeme je rozebírat zejména při aplikaci na zmíněný CIR model, jsou rozebrány ve druhé kapitole této práce. Jedná se zejména o tři hlavní používané metody, metodu nejmenších čtverců (OLS), metodu maximální věrohodnosti (MLE) a momentovou metodu (GMM).

Často kladený požadavek je snadná kalibrace na finanční deriváty, které z modelů úrokových měr těží na trhu nejvíce. Ačkoliv toto pro nás není prioritní, tak model, který jsme vybrali (CIR) se pro práci s finančními deriváty hodí, dosažené výsledky v implementaci tedy mohou mít širší aplikaci.

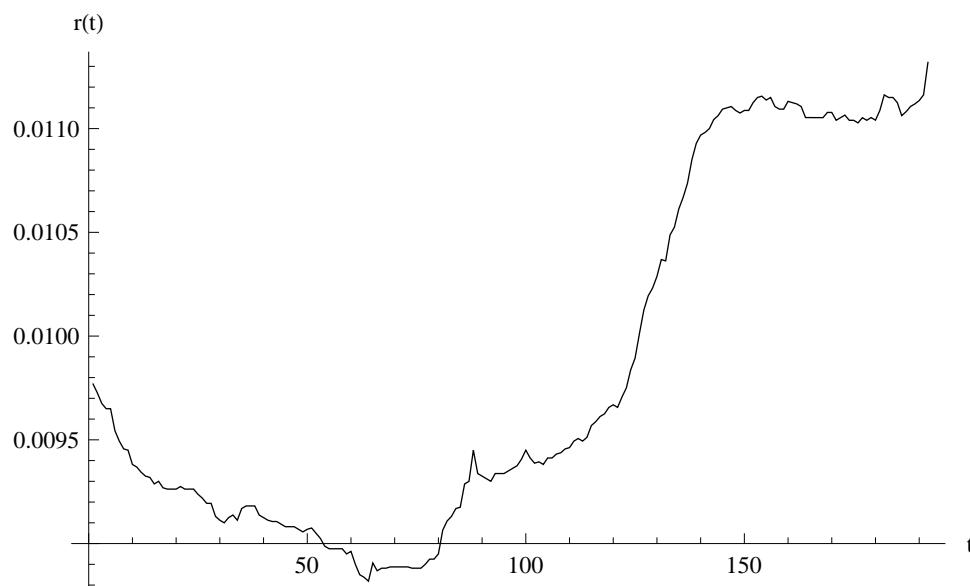
Kromě dostatečné jednoduchosti kalibrace modelu pro praktické použití na historická data budeme chtít model také validovat, tedy ověřit, že dává racionální a konzistentní výsledky (back-testing). Toho dosáhneme např. sérií simulací, při kterých nageneryjeme sady scénářů z modelu s variabilně volenými parametry a následně ověříme, že vybraná kalibrační metoda odhaduje parametry nestranně a stabilně. V těchto experimentech lze sledovat, jak závisí úspěšnost konkrétních metod na veličinách jako je počet historických dat, vliv volatility nebo vlastnos-

ti trendu. Schopnost modelu předpovídat a vlastnosti různých metod kalibrace budou detailně otestovány v praktické části ve třetí kapitole. Pro implementaci použijeme profesionální matematický software Mathematica verze 7 a 8, které má v praxi pojistný matematik často k dispozici.

1. Vybrané modely úrokových měr

Úvodní kapitola přinesla přehled nejdůležitějších známých modelů úrokových měr, jejich dělení a naznačila, které vlastnosti pro nás budou klíčové. Vytyčili jsme si také, že kalibraci a implementaci budeme soustředit na model CIR. V této kapitole postupně odvodíme jednotlivé složky CIR modelu, teoreticky je popíšeme, ilustrujeme významy parametrů a ucelíme si fakta a značení, ze kterých budou vycházet další části této práce. V rámci kontextualizace zmíníme ještě dva další modely, jednak Vašíčkův, který je vývojovým předchůdcem našeho ústředního modelu, dále pak model CKLS (Chan, Karolyi, Longstaff, a Sanders), jenž je naopak jeho zobecněním a budeme ho využívat při pozdější kalibraci.

Než přistoupíme k zavedení modelu, podívejme se na ukázkou trajektorie úrokové míry (6-měsíční LIBOR na Euro, kótovaný v pracovní dny za rok 2010, celkem 192 kótací, obr. 1.1), jejíž modelování a predikce představují typický úkol pro aplikaci našeho modelu. Vzhledem k diskrétní formě pozorování nezaznamenáváme skokové vývoje, typické pro spojitý vývoj finančních řad. I diskrétně pozorované úrokové míry modelujeme spojitě (takový je standardně i jejich vývoj bez ohledu na kótaci), k diskretizaci přistoupíme až ve fázi implementace.



Obrázek 1.1: 6-měsíční LIBOR na Euro v denní kótaci (2010) [8].

1.1 Drift

Pokusíme se nyní rozložit chování takovéto časové řady do dvou složek: driftová (úroveň) a volatilní (difúzní, náhodná, rušící, šum) [9]. Driftovou složku uvažujeme standardně deterministickou, bez náhodné komponenty. Podívejme se například, jak by vypadal zcela nejjednodušší model úrokové míry, pokud bychom

převzali schéma typické pro modelování ceny akcie (tedy růst daným tempem):

$$dr(t) = \mu r(t) dt, \quad r(0) = r_0.$$

V textu budeme používat tuto intuitivní notaci, která má ale korektní podtext. V tomto případě by šlo rovnici upravit do tvaru

$$\frac{dr(t)}{dt} = \mu r(t) \quad \text{neboli} \quad r'(t) = \mu r(t).$$

Z druhého vyjádření je již vidět explicitní řešení takovéto rovnice a to

$$r(t) = r_0 e^{\mu t}.$$

Tento jednoduchý příklad pro nás bude vodítkem u složitějších rovnic. Přejdeme nyní k realističtějšímu modelu, který místo rostoucí tendence bude mít vlastnost návratu ke střední hodnotě. Budiž μ takovouto rovnovážnou (ekvilibriální) hodnotou, $\mu > 0$. Poté je přirozené modelovat $r(t)$ následujícím způsobem:

$$dr(t) = (\mu - r(t)) dt, \quad r(0) = r_0.$$

Přidejme ještě parametr α , který bude určovat rychlost návratu k μ ($\alpha > 0$). Rovnici pak upravíme náležitým způsobem:

$$dr(t) = \alpha(\mu - r(t)) dt, \quad r(0) = r_0. \quad (1.1)$$

Explicitní řešení této rovnice je snadné pomocí metody separace proměnných a variace konstant [11]. Začneme řešením homogenní rovnice

$$\begin{aligned} dr(t) &= -\alpha r(t) dt \\ \frac{d \ln(r(t))}{dt} &= -\alpha \\ r(t) &= K e^{-\alpha t}, \quad K \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Uvažme nyní řešení tvaru $r(t) = K(t)e^{-\alpha t}$, pak

$$\begin{aligned} (K(t)e^{-\alpha t})' &= \alpha(\mu - K(t)e^{-\alpha t}) \\ K'(t)e^{-\alpha t} &= \alpha\mu \\ K'(t) &= \alpha\mu e^{\alpha t} \\ K(t) &= \mu e^{\alpha t} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

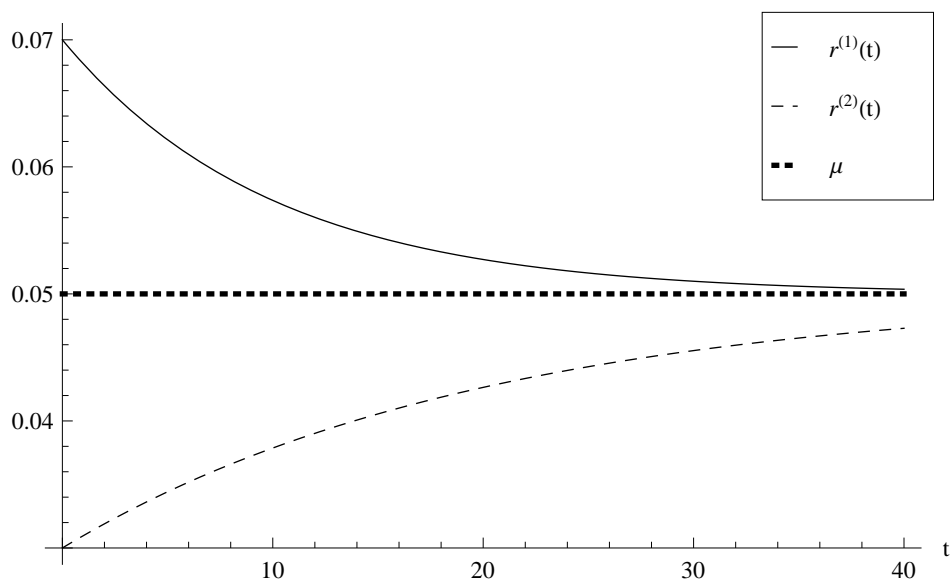
dále dopočteme konstantu z okrajové podmínky:

$$\begin{aligned} r_t &= e^{-\alpha t}(\mu e^{\alpha t} + C) \\ r_0 &= \mu + C \\ C &= r_0 - \mu \end{aligned}$$

a konečně

$$r(t) = \mu + (r_0 - \mu)e^{-\alpha t}. \quad (1.2)$$

Z řešení (1.2) je dobře vidět dynamika modelu s touto vlastností (mean-reversion). Pro ilustraci ještě porovnejme v grafu 1.2 vývoj dvou úrokových sazeb podle tohoto modelu, $r_0^{(1)} = 7\%$, $r_0^{(2)} = 3\%$, $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = 5\%$, $\alpha^{(1)} = 0.1$, $\alpha^{(2)} = 0.05$. Je jasně vidět, jak se model vzhledem k parametrům chová, ověřili jsme si tedy graficky interpretaci, kterou jsme parametrům přisoudili. Nyní můžeme model obohatit o stochastickou složku.



Obrázek 1.2: Příklad vývoje dvou úrokových sazeb podle (1.2).

1.2 Volatilita

Jak jsme již zmínili, volatilní složka se typicky modeluje pomocí standardního Wienerova procesu [9], budeme ho značit $W(t)$ ($t \geq 0$). Připomeňme, že se jedná o stochastický proces, charakterizovaný těmito vlastnostmi [9]:

1. $W(0) = 0$.
2. $W(t)$ je skoro jistě spojitou funkcí t .
3. $W(t)$ má nezávislé, stacionární přírůstky.
4. $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$, kdykoli $s < t$.

Vzhledem k tomu, že je Wienerův proces standardizovaný, zavedeme ještě parametr volatility σ , $\sigma > 0$. Vezměme nyní driftovou složku modelu konstantní a uvažme model tvaru

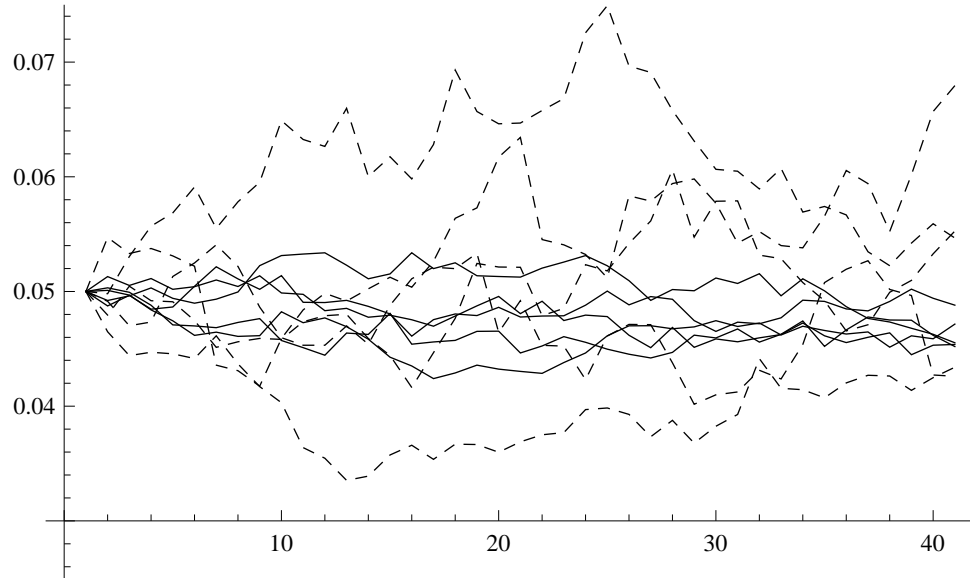
$$dr(t) = \mu + \sigma dW(t). \quad (1.3)$$

Abychom mohli demonstrovat možné trajektorie takto modelované úrokové míry, diskretizujme diferenciální rovnici (1.3) s krokem $\Delta > 0$. Kdykoliv v tomto textu budeme mluvit o diskretizaci, myslíme tím diskretizaci standardní (Eulerovu [9]). Jemnější diskretizace (Milshteinova aj.) je sice lepší aproximací, ale zbytečně model komplikuje a efekt má spíše pro modelování ceny akcií, než úrokových měř. Dostáváme tedy

$$r_t = r_{t-1} + \sigma\sqrt{\Delta}\epsilon_t, \quad r_0 = \mu \text{ (sj.)}, \quad (1.4)$$

kde $\epsilon_t \sim N[0, \Delta]$ jsou nezávislé náhodné veličiny.

Porovnejme nyní opět dva modely s různou volbou parametrů. Zvolme $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = 5\%$, $\sigma^{(1)} = 0.001$, $\sigma^{(2)} = 0.0025$ a $\Delta = 1$. Provedme pět simulací (trajektorií, realizací) z každého modelu a porovnejme je v grafu 1.3. Graf dobře ilustruje to, co je teoreticky zřejmé, tedy že vyšší parametr volatility (větší šum) způsobuje citelnější výchyly ve vývoji úrokové míry (a tedy extrémnější scénáře).



Obrázek 1.3: Simulace z modelu (1.4) s nižší volatilitou (plnou čarou) a z modelu s vyšší volatilitou (přerušovaně).

1.3 Vašíčekův model

Poté, co jsme probrali obě hlavní složky modelu zvlášť, je na čase spojit je dohromady při konstrukci prvního skutečně používaného modelu. Předtím ještě uvedme obecný vzor, kterého se budeme v této práci držet [12]. Vychází z obecně definované driftové a volatilní složky tak, jak jsme je zavedli. Náš obecný model je tedy

$$dr(t) = \mu(r(t), t) dt + \sigma(r(t), t) dW(t). \quad (1.5)$$

Oldřich Vašíček, český matematik, zavedl svůj model v roce 1977 [12]. Je to nejjednodušší prakticky použitelný model, je charakterizován třemi strukturálními parametry (μ , α , a σ) a je v něm zakomponována vlastnost návratu ke střední hodnotě. Parametry uvažujeme tak jako v minulém kontextu pouze kladné. Vašíček vychází z Ornstein–Uhlenbeckova procesu (modifikace náhodné procházky) s konstantními koeficienty [4]. Volatilní složku modeluje velmi jednoduše, $\sigma(r(t), t) = \sigma$. Díky své nekomplikovanosti se hodí pro oceňování základních finančních derivátů. Model je popsán touto diferenciální rovnicí:

$$dr(t) = \alpha(\mu - r(t)) dt + \sigma dW(t), \quad r(0) = r_0.$$

Po diskretizaci dostáváme

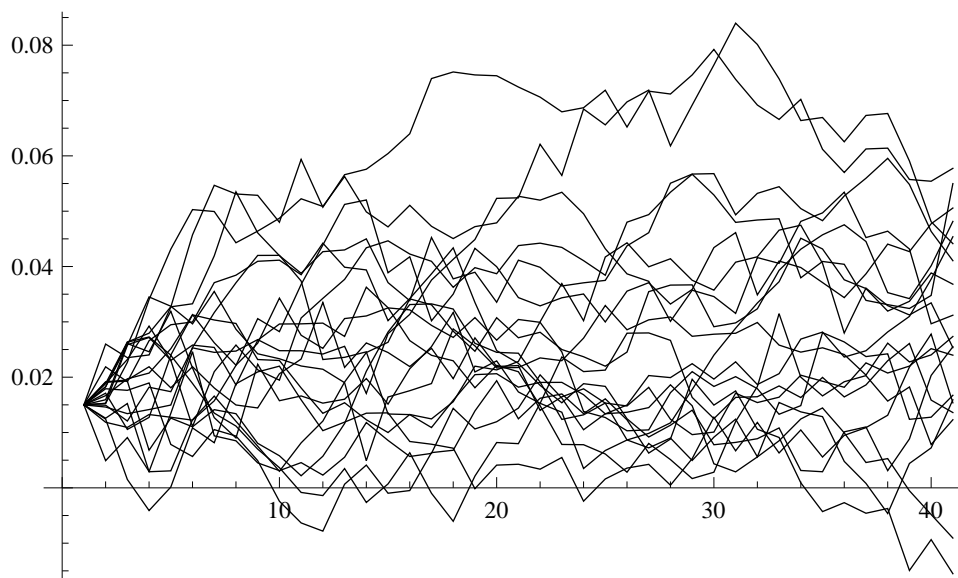
$$r_t = r_{t-1} + \alpha(\mu - r_{t-1})\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\epsilon_t. \quad (1.6)$$

Vzhledem k tomu, že tento model pro nás představuje pouze východisko pro další práci a přidání dalších prvků, nebudeme se jeho vlastnostmi zabývat příliš podrobně, uvedme však alespoň několik prvků, které se mohou hodit i v modelech, které na něj navazují. Jak je uvedeno v [4], hodnota $r(t)$ má normální rozdělení (podmíněné znalostí situace v čase 0). Střední hodnota odpovídá našemu výpočtu (1.2), tedy

$$\mu + (r_0 - \mu)e^{-\alpha t}. \quad (1.7)$$

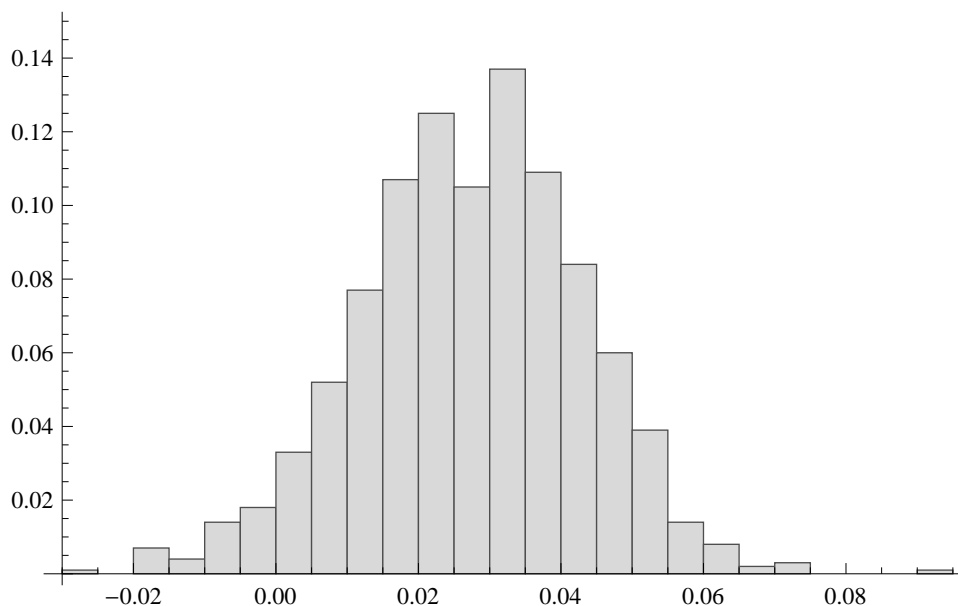
Rozptyl je pak roven

$$\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}). \quad (1.8)$$



Obrázek 1.4: Simulace z Vašíčkova modelu (1.6).

Podívejme se opět na ukázkou simulací z tohoto modelu. Zvolme $\Delta = 1$, $\mu = 3\%$, $\alpha = 0.05$, $\sigma = 0.005$ a $r_0 = 1.5\%$ a vygenerujme 20 simulací z Vašíčkova modelu (1.6). Z grafu 1.4 je vidět základní nevýhoda Vašíčkova modelu: úrokové míry v něm mohou nabývat i záporných hodnot.



Obrázek 1.5: Histogram konečných hodnot simulací z Vašíčkova modelu (1.6).

Zkusme nyní vygenerovat 1000 simulací o 40 krocích a podívejme se na histogram konečných hodnot těchto simulací 1.5. Z grafu lze usoudit, že předpoklad normality dat je racionální. Střední hodnota těchto dat je 0.02737 a výběrový

rozptyl 0.00024605. Porovnáme-li to se skutečnou střední hodnotou a rozptylem podle (1.7) a (1.8), ty vycházejí 0.02797 a 0.00024605 - Monte Carlo simulace tedy poskytuje dobrý odhad skutečných teoretických vlastností modelu.

1.4 CIR model

Nevýhoda možné zápornosti úrokové míry nás vede úpravě, kterou již dostaneme centrální model naší práce. Cox, Ingersoll a Ross v roce 1985 odvodili model úrokové míry z obecně rovnovážného modelu oceňování aktiv (general equilibrium asset pricing model) [6]. Z pohledu Vašíčkova modelu se však jedná o jednoduchou nadstavbu, při které si uvědomíme, že volatilní složka procesu nezávisí jen na konstantním parametru, ale je úměrná přímo výši modelované úrokové míry. CIR model vychází z odmocninové difúzní složky (root-diffusion [4]), tedy $\sigma(r(t), t) = \sigma\sqrt{r(t)}$ a celkově pak je CIR model popsán (za předpokladu kladnosti strukturálních parametrů)

$$dr(t) = \alpha(\mu - r(t)) dt + \sigma\sqrt{r(t)} dW(t), \quad r(0) = r_0.$$

Pro účely pozdější aplikace uvedme ještě druhou parametrizaci [5]:

$$dr(t) = (\alpha' + \beta'r(t)) dt + \sigma'\sqrt{r(t)} dW(t), \quad r(0) = r_0,$$

kteřá je na první pohled ekvivalentní a parametry obou vyjádření lze vzájemně snadno vyjádřit. Kromě toho, že druhá parametrizace již nemusí splňovat podmínku kladnosti parametrů (kromě σ'), nemá také intuitivní interpretaci, a proto se budeme držet spíše první rovnice.

Hlavní výhodou modelu je, že při splnění podmínky

$$\alpha\mu > \sigma^2$$

je zaručeno, že modelovaná úroková míra zůstane kladná [4]. Jak zmiňuje De Rossi [7], kromě tohoto atributu se stal CIR model populární ještě kvůli dalším dvěma charakteristickým vlastnostem, které lze pozorovat na množině reálných dat:

- podmíněná heteroskedasticita (v kontrastu s Vašíčkovým modelem), tedy nekonstantní (podmíněný) rozptyl a
- časově proměnná tržní cena rizika (time-varying market price of risk), tedy závislost Sharpeova poměru, který měří rizikovou prémii na jednotku rizika, na čase.

Pro naše simulace je trochu nepříjemné, že při diskretizaci může dojít k tomu, že úroková míra i při splnění těchto podmínek klesne do záporných hodnot a simulace dále nemůže pokračovat. To je však dáno tím, že diskretizace diferenciální rovnice je pouze jejím přiblížením, aproximace. Pokud si vezmeme stejnou simulaci s jemnějším krokem, záporné úrokové míry by se nabýly z podstaty modelu nemělo. Kromě zjemnění diskretizace se budeme záporným hodnotám při simulacích vyhýbat i vhodnou volbou parametrů.

Přístupme opět k diskretizaci modelu, analogicky jako v (1.6):

$$r_t = r_{t-1} + \alpha(\mu - r_{t-1})\Delta + \sigma\sqrt{\Delta r_{t-1}}\epsilon_t, \quad (1.9)$$

resp.

$$r_t = r_{t-1} + (\alpha' + \beta' r_{t-1})\Delta + \sigma' \sqrt{\Delta r_{t-1}} \epsilon_t. \quad (1.10)$$

Předtím než zkusíme (jako u Vašíčkova modelu) vygenerovat simulace a porovnat výsledky, upřesněme ještě rozdělení $r(t)$, za podmínky znalosti situace v čase 0 [4]. Mohli bychom obecněji uvést podmíněnou střední hodnotu a rozptyl za podmínky sigma algebry "informace" v čase $s < t$, spokojíme se však pouze s $s = 0$. Podmíněná střední hodnota pak je stejně jako v (1.7) rovna

$$\mu + (r_0 - \mu)e^{-\alpha t}, \quad (1.11)$$

podmíněný rozptyl lze vyjádřit o něco komplikovaněji jako

$$r_0 \frac{\sigma^2}{\alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t}) + \mu \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha t})^2. \quad (1.12)$$

S rozdělením $r(t)$ je to již komplikovanější [6, 10]. Označme vektor strukturálních parametrů $\theta = (\alpha, \mu, \sigma)$, vezměme $\Delta t > 0$ a uvažme podmíněnou hustotu rozdělení $r(t + \Delta t)$ za podmínky znalosti $r(t)$ a parametrů θ :

$$p(r(t + \Delta t)|r(t), \theta, \Delta t) = ce^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{q/2} I_q(2\sqrt{uv}), \quad (1.13)$$

kde

$$\begin{aligned} c &= \frac{2\alpha}{\sigma^2(1 - e^{-\alpha\Delta t})}, \\ u &= cr(t)e^{-\alpha\Delta t}, \\ v &= cr(t + \Delta t), \\ q &= \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2} - 1 \end{aligned}$$

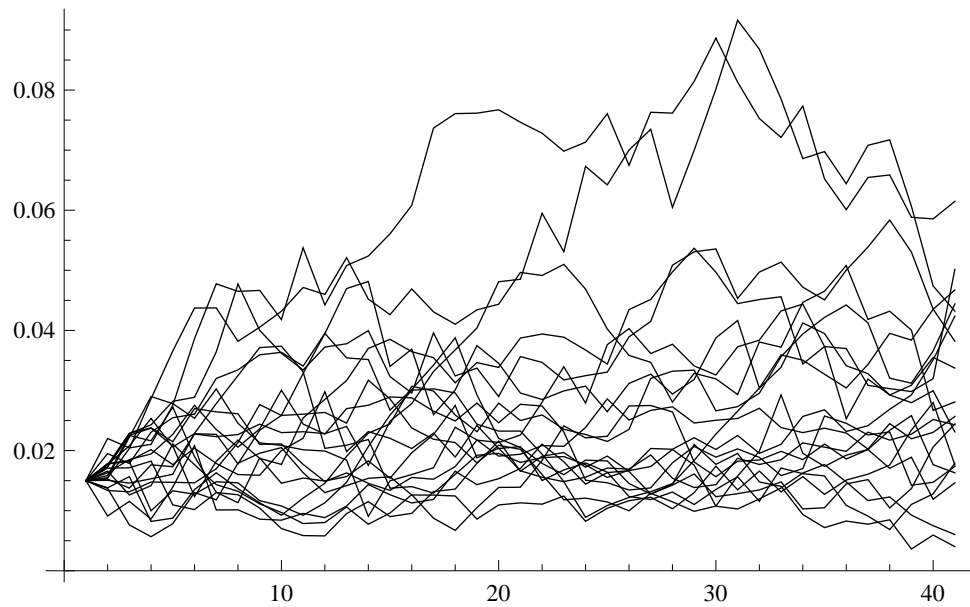
a $I_q(\cdot)$ je modifikovaná Besselova funkce prvního druhu a řádu q . Přejdeme-li k transformaci $s(t) = 2cr(t)$, a označíme její podmíněnou hustotu g , lze psát

$$g(s(t + \Delta t)|s(t), \theta, \Delta t) = \frac{1}{2c} p(r(t + \Delta t)|r(t), \theta, \Delta t) = \chi^2(s(t + \Delta t), 2q + 2, 2u),$$

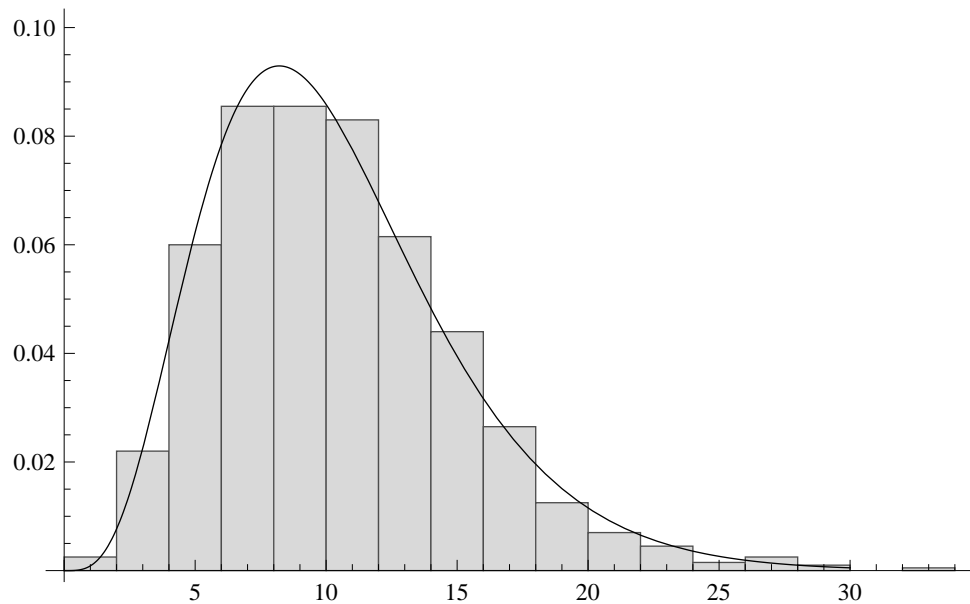
neboli $s(t)$ má necentrální χ^2 rozdělení s $2q + 2$ stupni volnosti a decentralizujícím parametrem $2u$.

Nyní provedme 20 simulací, pro přesné porovnání vezměme stejné trajektorie Wienerových procesů jako u Vašíčkova modelu, volbu parametrů ponechme stejnou s výjimkou parametru volatility, kde došlo ke změně struktury a proto volíme $\sigma = 0.025$. Z grafu 1.6 je vidět, že chování úrokových měř zůstává analogické tomu v grafu 1.4, ale úprava driftové složky již nedovoluje úrokové míře tak snadno klesnout do záporných hodnot.

Vygenerujme dále jiných 1000 simulací (tentokrát s odlišnými trajektoriemi Wienerových procesů) a podívejme se na konečné hodnoty po čtyřiceti krocích, $r_i(40)$, $i = 1, \dots, 1000$. Průměr, resp. výběrový rozptyl vycházejí z dat 0.02800, resp. 0.000159 což koresponduje s teoretickými hodnotami dle (1.11) a (1.12), které jsou rovny 0.02797, resp. 0.000184. Ještě zajímavější je pohled na histogram 1.7 transformovaných konečných hodnot $s_i = 2cr_i$, který jsme proložili hustotou necentrovaneho χ^2 rozdělení s příslušnými parametry (viz výše). Grafická reprezentace tohoto porovnání přesně potvrzuje teoretické poznatky.



Obrázek 1.6: Simulace z CIR modelu (1.9).



Obrázek 1.7: Histogram (transformovaných) konečných hodnot simulací z CIR modelu (1.9) proložený hustotou necentrovaneho χ^2 rozdělení.

1.5 CKLS model

Poslední a nejobecnější model, kterým se budeme zabývat, je dílem autorů Chan, Karolyi, Longstaff, a Sanders z roku 1992 [9]. Ačkoliv jeho aplikace je v mnohém omezená, bude se nám hodit pro obecnější schéma pro kalibraci CIR modelu v další kapitole. Vychází z CIR modelu a zobecňuje ho tím, že v difúzní složce nechává volnější závislost na úrokové míře:

$$dr(t) = \alpha(\mu - r(t)) dt + \sigma r^\gamma(t) dW(t), \quad r(0) = r_0.$$

Parametry opět uvažujeme pouze kladné. Model v sobě zahrnuje Vašíčkův ($\gamma = 0$), CIR model ($\gamma = \frac{1}{2}$) a jiné. O jeho rozdělení již obecně nelze činit žádné závěry. Jak je uvedeno v [9], zajímavé výsledky dává volba $\gamma = \frac{3}{2}$ (Conley se svým kolektivem pomocí GMM odvodili, že tato volba je v jistém smyslu optimální). Diskretizace je zřejmou analogií předchozích výsledků:

$$r_t = r_{t-1} + \alpha(\mu - r_{t-1})\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}r_{t-1}^\gamma\epsilon_t, \quad (1.14)$$

resp.

$$r_t = r_{t-1} + (\alpha' + \beta'r_{t-1})\Delta + \sigma'\sqrt{\Delta}r_{t-1}^\gamma\epsilon_t. \quad (1.15)$$

2. Kalibrace

Kalibrace je klíčový krok při aplikaci modelu na konkrétní data. Je jí myšleno nastavení (odhad) parametrů tak, aby model "pasoval" na tržní (historická) data. Nakalibrovaný model pak lze použít k predikci, popisu statistických vlastností modelované úrokové míry aj. Samotný odhad parametrů není teoreticky náročný, implementačně se však jedná o nejsložitější pasáž - vyladit metodiku tak, aby byla imunní vzhledem k časové složitosti, univerzální (tj. fungovala obecně, nedělala problémy na některém specifickém vzorku) a dávala racionální a stabilní výsledky, k tomu je zapotřebí řada testů a experimentů, které budou obsahem následující kapitoly. Tato část pro ně poskytne teoretické zázemí.

Do úvahy vezmeme tyto standardně používané metody [9, 10]:

- Metoda nejmenších čtverců (OLS, Ordinary Least Squares)
- Metoda maximální věrohodnosti (MLE, Maximum Likelihood Estimation)
- Obecná momentová metoda (GMM, Generalized Method of Moments)

Nejprve upřesněme úlohu a značení: uvažujeme historická pozorování úrokových měř r_{t_i} , $i = 0, \dots, N$ ($N \in \mathbb{N}$). Pro jednoduchost budeme brát $t_i = i\Delta t$, $i = 0, \dots, N$ (speciálně tedy $t_0 = 0$), neboli $r_{t_i} = r_{i\Delta t} = r_{t_{i-1}+\Delta t}$ jsou ekvidistantní pozorování. Naším úkolem je spolehlivou statistickou metodou odhadnout strukturální parametry modelu (v případě CIR to jsou α , μ a σ). Díky tomu, že jsme v předchozí sekci věnovali dostatek prostoru pravděpodobnostním vlastnostem jednotlivých modelů (zejména hustotám a podmíněným momentům modelovaných úrokových měř), máme připravený aparát pro rychlé zavedení výše vyjmenovaných metod.

2.1 Metoda nejmenších čtverců

Tato základní a nenáročná metoda nemá problémy s časovou složitostí. Na druhou stranu dává natolik nepostačující výsledky, že není v praxi příliš použitelná [9]. I přesto má smysl si ji uvést, může totiž sloužit k získání počátečních odhadů pro nějakou sofistikovanější metodu.

Vezměme diskretizaci CIR modelu (1.9) v souladu s naším značením:

$$r_{t_i} = r_{t_{i-1}} + \alpha(\mu - r_{t_{i-1}})\Delta t_i + \sigma\sqrt{\Delta t_i r_{t_{i-1}}}\epsilon_{t_i}, \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, \dots, N,$$

přijmeme předpoklad ekvidistantních pozorování a upravme ji do praktičtějšího tvaru:

$$\begin{aligned} r_{t_i} - r_{t_{i-1}} &= \alpha(\mu - r_{t_{i-1}})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t r_{t_{i-1}}}\epsilon_{t_i} \\ \frac{r_{t_i} - r_{t_{i-1}}}{\sqrt{r_{t_{i-1}}}} &= \frac{\alpha\mu\Delta t}{\sqrt{r_{t_{i-1}}}} - \alpha\sqrt{r_{t_{i-1}}}\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\epsilon_{t_i}. \end{aligned}$$

Odtud jsme již schopni nalézt odhady parametrů driftové složky, využijeme-li symetrického rozdělení ϵ_{t_i} a minimalizujeme součet čtvercových chyb:

$$(\hat{\alpha}, \hat{\mu}) = \underset{\alpha, \mu}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^N \left(\frac{r_{t_i} - r_{t_{i-1}}}{\sqrt{r_{t_{i-1}}}} - \frac{\alpha\Delta t\mu}{\sqrt{r_{t_{i-1}}}} + \alpha\sqrt{r_{t_{i-1}}}\Delta t \right)^2. \quad (2.1)$$

Tato úloha už je snadno řešitelná (lze ji dovést až do explicitních vzorců, ty ale nebudeme potřebovat [10]). Odhad parametru volatility pak získáme následovně:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^N \left(\frac{r_{t_i} - r_{t_{i-1}}}{\sqrt{r_{t_{i-1}}}} - \frac{\hat{\alpha} \Delta t \hat{\mu}}{\sqrt{r_{t_{i-1}}}} + \hat{\alpha} \sqrt{r_{t_{i-1}}} \Delta t \right)^2}{N}}. \quad (2.2)$$

2.2 Metoda maximální věrohodnosti

Metoda maximální věrohodnosti je vhodná v případě, že známe hustotu rozdělení modelované veličiny (např. v případě CIR modelu). Pracuje na známém konceptu (obecně viz [1]), tedy volbě parametrů tak, aby skutečně pozorovaná data byla nejpravděpodobnějším možným výsledkem (maximálně věrohodná).

Definujme věrohodnostní funkci [10]

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^N p(r_{t_i} | r_{t_{i-1}}, \theta, \Delta t),$$

kde p je hustota definovaná vztahem (1.13). Odpovídající logaritmická věrohodnostní funkce je

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = \sum_{i=1}^N \ln p(r_{t_i} | r_{t_{i-1}}, \theta, \Delta t),$$

odkud po dosazení z (1.13) dostáváme

$$l(\theta) = N \ln(c) + \sum_{i=1}^N \left(-u_{t_i} - v_{t_i} + \frac{1}{2} q \ln \left(\frac{v_{t_i}}{u_{t_i}} \right) + \ln I_q(2\sqrt{u_{t_i} v_{t_i}}) \right),$$

kde

$$\begin{aligned} u_{t_i} &= cr_{t_{i-1}} e^{-\alpha \Delta t} \\ v_{t_i} &= cr_{t_i}. \end{aligned}$$

Odhad pak získáme maximalizací logaritmické věrohodnostní funkce, tedy

$$\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}) = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} l(\theta). \quad (2.3)$$

Při maximalizaci uvažujeme (je-li to možné a nekomplikuje-li to výpočet) zmíněné restrikce parametrů (kladnost).

2.3 Obecná momentová metoda

Momentová metoda vychází ze znalosti teoretických momentů z rozdělení modelované úrokové míry [9, 5]. Ty pak porovnáme s výběrovými momenty z pozorovaných dat a vybíráme parametry tak, abychom dostali v jistém smyslu nejlepší shodu. Hodí se zejména v případě, že neznáme přesnou hustotu rozdělení (např. u CKLS modelu), nebo je-li MLE výpočetně příliš náročná. Mezi její nevýhody

při aplikaci na CIR patří to, že ignoruje známou hustotu (nevyužíváme tedy plnou informaci). Také bývá obtížné určit momenty, které do porovnání zahrnout.

Upustíme na chvíli od značení, které jsme pro tuto kapitolu zavedli a zpracujme metodu obecněji. Nechť θ opět reprezentuje sadu parametrů, které chceme odhadnout,

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k).$$

Pokusíme se najít funkce $f_j(r(t)|\theta)$, $j = 1, \dots, m$, $m \geq k$, takové že

$$\mathbb{E}[f_j(r(t)|\theta)] = 0.$$

V souladu s našimi pozorováními r_{t_0}, \dots, r_{t_N} získáváme výběrové protivzorky

$$g_j(\theta) = \frac{1}{N+1} \sum_{t=t_0}^{t_N} f_j(r(t)|\theta), \quad j = 1, \dots, m.$$

Přejděme nyní k vektorovému zápisu:

$$\begin{aligned} f(r(t)|\theta) &= (f_1(r(t)|\theta), \dots, f_m(r(t)|\theta)) \\ g(\theta) &= (g_1(\theta), \dots, g_m(\theta)) = \frac{1}{N+1} \sum_{t=t_0}^{t_N} f(r(t)|\theta) \\ J(\theta) &= g(\theta)W(\theta)g^T(\theta), \end{aligned}$$

kde $W(\theta)$ je pozitivně-definitní váhová matice (T značí transpozici). Pro optimalizaci výpočtu je možné volit váhovou matici identickou. Odhad $\hat{\theta}$ pak získáme minimalizací $J(\theta)$:

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} J(\theta).$$

Při standardním postupu se snažíme najít momenty tak, aby $m = k$, pak jsme většinou schopni odhadnout parametry tak, aby $J(\hat{\theta}) = 0$.

Aplikujme nyní tento obecný postup na model CKLS. Uvědomme si, že tato metoda bude také použitelná pro model CIR: jakmile pro sadu parametrů CKLS modelu $\theta = (\alpha, \mu, \sigma, \gamma)$ najdeme funkce $f_j(r(t)|\theta)$, $j = 1, \dots, m$, $m \geq k = 4$ splňující výše zmíněné předpoklady, pak lze stejnou sadu funkcí použít i pro odhad parametrů modelu CIR $\theta' = (\alpha', \mu', \sigma')$, stačí v nich dosadit $\theta = (\alpha', \mu', \sigma, \frac{1}{2})$ a stále platí $m \geq k > k' = 3$.

Uvažme tedy model CKLS, diskretizaci (1.15) a volme $\Delta = 1$. Označme dále

$$\tilde{\epsilon}_t = \sigma' r_{t-1}^{\gamma'} \epsilon_t = r_t - r_{t-1} - \alpha' - \beta' r_{t-1}.$$

Vzhledem k rozdělení ϵ_t je zřejmé, že

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_t] &= \sigma' r_{t-1}^{\gamma'} \mathbb{E}[\epsilon_t] = 0 \\ \mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_t^2] &= \sigma'^2 r_{t-1}^{2\gamma'} \mathbb{E}[\epsilon_t^2] = \sigma'^2 r_{t-1}^{2\gamma'}. \end{aligned}$$

Uvědomíme-li si navíc, že $\tilde{\epsilon}_t$ je nekorelovaný jak s $\tilde{\epsilon}_{t-1}$, tak s r_{t-1} , docházíme k následující volbě vektoru $f(r(t)|\theta)$:

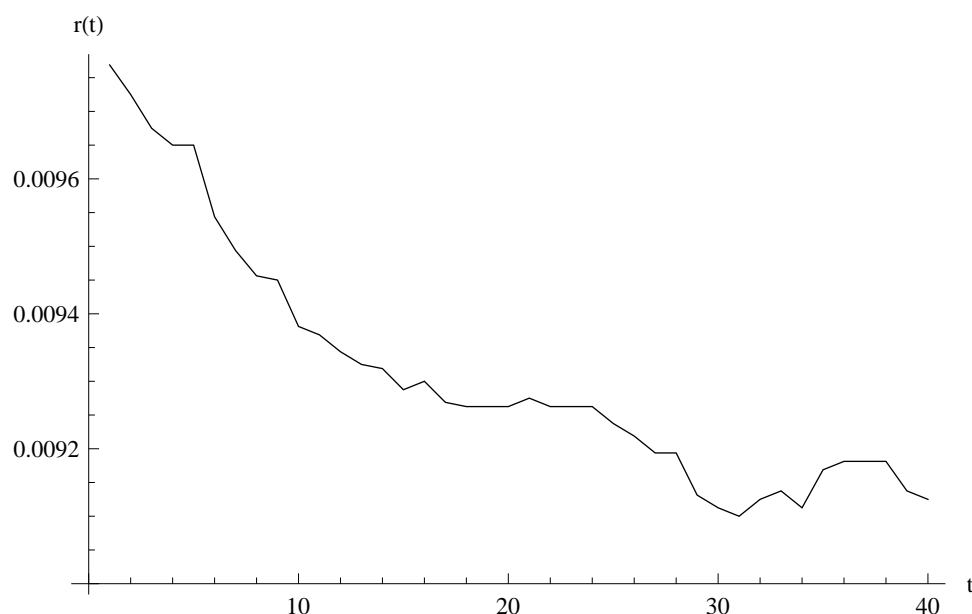
$$f(r(t)|\theta) = \begin{pmatrix} \tilde{\epsilon}_t \\ \tilde{\epsilon}_t r_{t-1} \\ \tilde{\epsilon}_t^2 - \sigma'^2 r_{t-1}^{2\gamma'} \\ (\tilde{\epsilon}_t^2 - \sigma'^2 r_{t-1}^{2\gamma'}) r_{t-1} \end{pmatrix}$$

Pak platí $\mathbb{E}[f(r(t)|\theta)] = 0$ a lze uplatnit výše uvedený postup.

3. Implementace

Teorie v předchozích částech nám připravila solidní aparát pro praktickou aplikaci. V této části srovnáme jednotlivé metody odhadů parametrů, vyzkoušíme je na reálných i simulovaných datech, podíváme se na jejich stabilitu a nestrannost, stejně tak jako na případné problémy, které mohou nesprávným nebo neopatrným použitím vzniknout. Soustředít se budeme na predikci budoucích úrokových měr, která je pro ocenění rent stěžejní. Důležitou součástí analýzy bude i výpočetní náročnost odhadů. Implementaci uskutečníme v softwaru Wolfram Mathematica (verze 7 a 8) a použijeme zabudované algoritmy na nalezení minima a maxima funkce. K implementaci vždy plně postačí poznatky shrnuté v předchozích kapitolách, na které se budeme odkazovat, není tedy potřeba uvádět části zdrojového kódu. Predikci uskutečňujeme intuitivním způsobem, tedy zanedbáním volatilitní složky v diskretizovaném modelu.

3.1 Metoda nejmenších čtverců

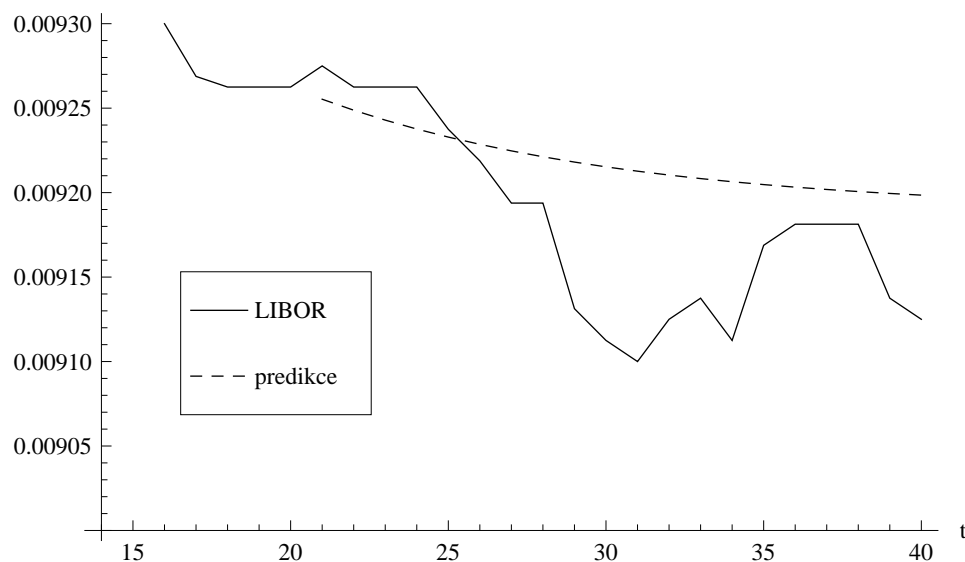


Obrázek 3.1: 6-měsíční LIBOR na Euro v denní kótaci (2010, prvních 40 kótací).

Tato metoda je výpočetně nejjednodušší a pokud by dávala pro některé situace postačující výsledky, jednalo by se tím o nejpraktičtější metodu. Poznatky jiných autorů ale kvalitu této metody zpochybňují [9]. Začneme s kalibrací CIR modelu dle značení diskretizace (1.9), $\Delta = 1$. Kalibrovat budeme metodou OLS, zajímat nás budou odhady $\hat{\mu}$, $\hat{\alpha}$ dle notace (2.1). Jako pozorování použijeme již zmíněné denní kótace 6-měsíční sazby LIBOR (viz graf 1.1). Nejprve zkusíme odhadnout parametry s použitím všech 192 sazeb roku 2010. Výsledné odhady jsou

$$(\hat{\mu}, \hat{\alpha}) = (0.07045, 0.000124).$$

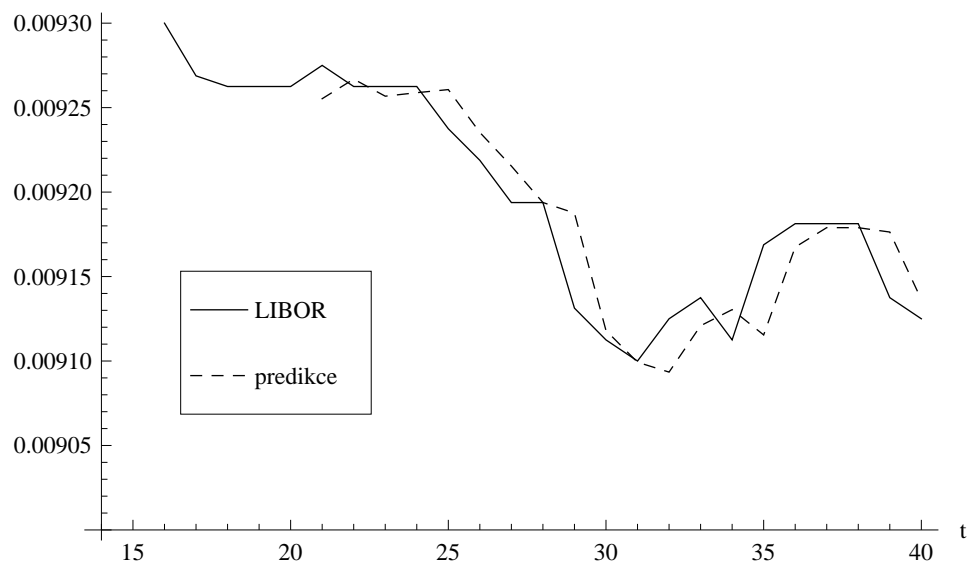
Vysoká rovnovážná úroveň koresponduje se strmým růstem sazby v druhé polovině roku 2010. Pokud by nás zajímala predikce pro začátek roku 2012, o té model na základě znalosti poslední denní kótace roku 2010 (1.13%) předpokládá růst na úroveň 1.28%. Tato predikce však nepočítá s kvalitativními odhady např. celkové tržní situace. Ve skutečnosti byla již v půlce roku 2011 tato sazba na úrovni 1.66%.



Obrázek 3.2: Porovnání skutečného vývoje a predikce založené na poslední (20.) kalibrované kótaci.

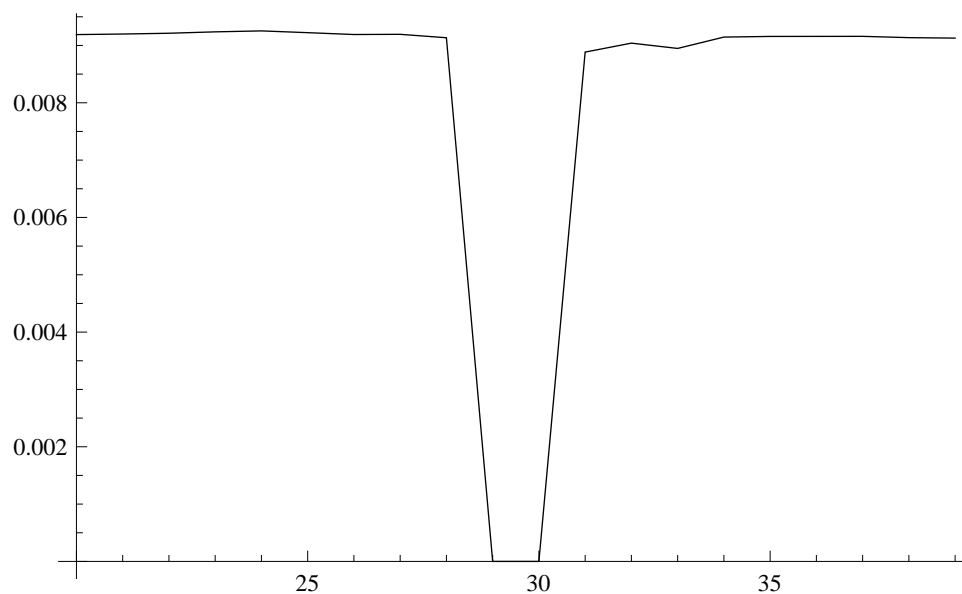
Zkusme se nyní zaměřit na krátkodobou předpověď a vezměme prvních 20 kótací zmíněné sazby v roce 2010, nakalibrujme model a odhadněme na základě poslední 20.kótace a odhadnutých parametrů vývoj příštích 20 kótací. Pro orientaci se podívejme na prvních 40 kótací v grafu 3.1. Odhad parametrů metodou OLS nyní dává $(\hat{\mu}, \hat{\alpha}) = (0.009189, 0.09861)$. Porovnejme v grafu 3.2 predikci a skutečný vývoj v druhých 20 kótacích roku 2010.

Zatímco v prvních predikcích jsou naše odhady blízké skutečnému vývoji, tím že jsme nakalibrovali model pouze jednou ztrácíme možnost reagovat na aktuální vývoj. Zatímco je tento přístup v pořádku v případě dlouhodobých odhadů, pro jiné účely (např. hedging) nás zajímá i vývoj predikce v případě, že model kalibrujeme průběžně (např. při predikci 22.kótace nakalibrujeme model na 2.-21.kótaci a bereme predikci o jeden krok, vycházející z 21.kótace). Na takto popsanou předpověď se můžeme podívat v grafu 3.3 - jedná se samozřejmě o zpřesnění, vzhledem k tomu že předpovídáme v každém čase pouze o jeden krok dopředu, přesto však výsledky nejsou o moc lepší, než kdybychom vzali předpověď zcela primitivní (např. hodnotu minulé kótace). Celkově tedy taková predikce nesplňuje požadavky, které na ni klademe. Je třeba si však uvědomit, že to neznamená selhání modelu - možná jsme pouze použili nevhodnou metodu kalibrace. To ukáží další až výpočty v této části. Podívejme se ještě na nestabilitu této metody, která z grafu predikcí není viditelná a odhalí ji až důkladnější zkoumání odhadnutých parametrů. Podívejme se na vývoj odhadu $\hat{\mu}$ v grafu 3.4 (čas značí dobu, ve které jsme odhad teoreticky uskutečnili). Náhlý propad odhadu rovnovážné úrovně v



Obrázek 3.3: Porovnání skutečného vývoje a průběžné predikce založené na poslední kalibrované kótaci.

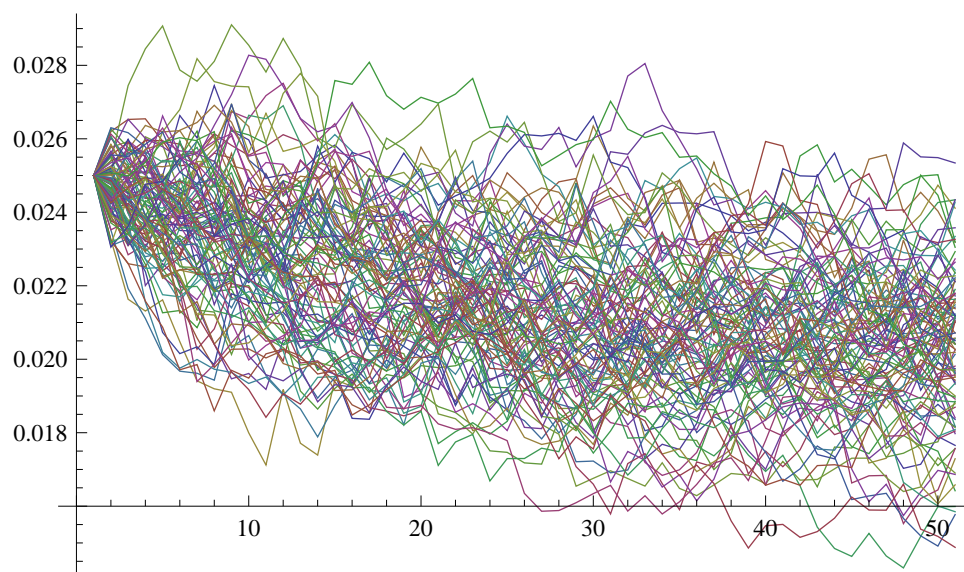
časech 29 a 30 reaguje na strmější pokles sazby v těchto časech, ukazuje ale na výkyv, který bychom od stabilní metody neočekávali. Zajímavé bude porovnání se stejným odhadem pomocí jiné metody.



Obrázek 3.4: Vývoj odhadu parametru μ .

Zkusme nyní ověřit, zda OLS odhaduje parametry v jistém smyslu nestranně a přesně. Vygenerujme 100 simulací (každou o 50 krocích) z modelu CIR s parametry $\mu = 2\%$, $\alpha = 0.05$ a $\sigma = 0.005$. Za počáteční úroveň (v čase 1) volíme $r_0 = 2.5\%$. Na vývoj simulací se podíváme v grafu 3.5, poté co jsme se seznámili s chováním modelu při nastavení jednotlivých parametrů v první kapitole vidíme očekávaný průběh směrem k rovnovážné hodnotě.

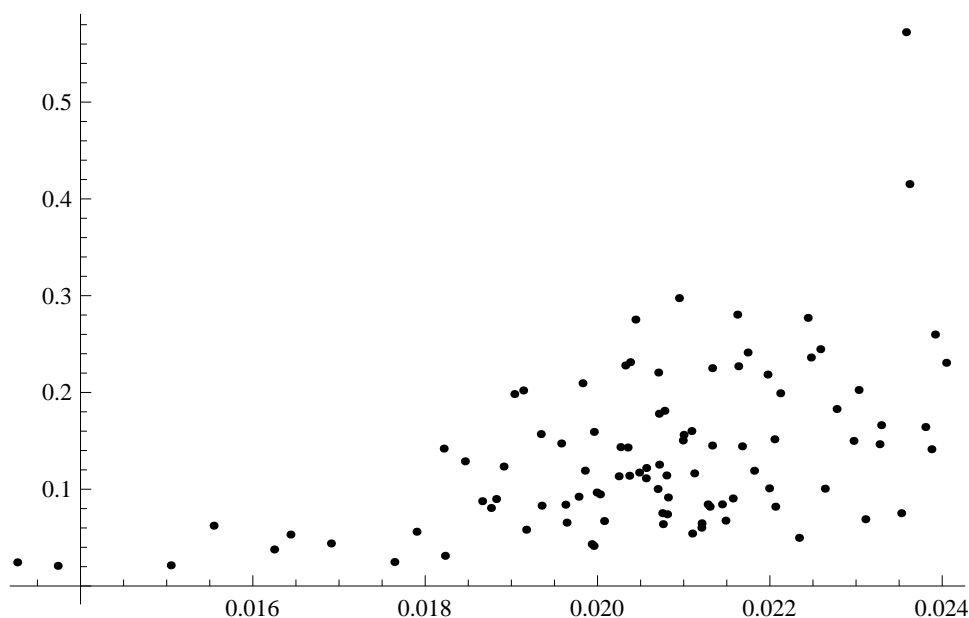
Odhadneme stokrát (z každé realizované simulace) parametry modelu CIR.



Obrázek 3.5: 100 simulací délky 50 z modelu CIR.

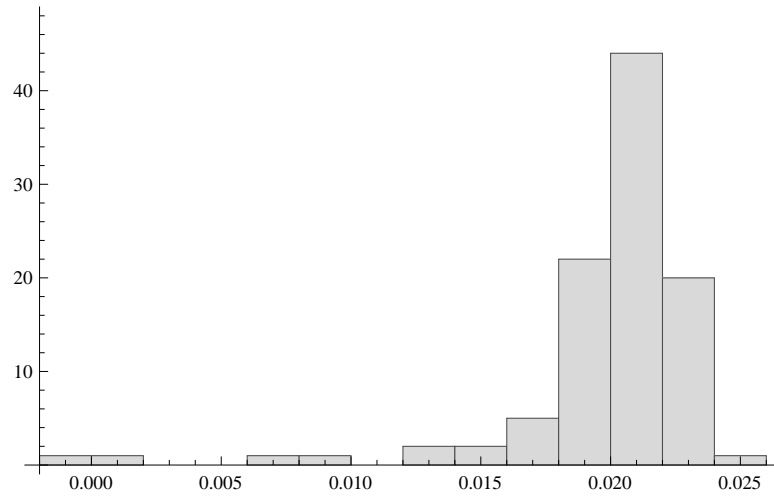
Pokud se máme spolehnout na odhady metody OLS, měly by aritmetické průměry odhadnutých parametrů (označme je $\tilde{\mu}$, $\tilde{\alpha}$ a $\tilde{\sigma}$) být blízké skutečným hodnotám. Porovnejme toto v následující tabulce:

skutečné hodnoty	$\mu = 0.0200$	$\alpha = 0.0500$	$\sigma = 0.00500$
odhadnuté hodnoty	$\tilde{\mu} = 0.0199$	$\tilde{\alpha} = 0.1310$	$\tilde{\sigma} = 0.00475$

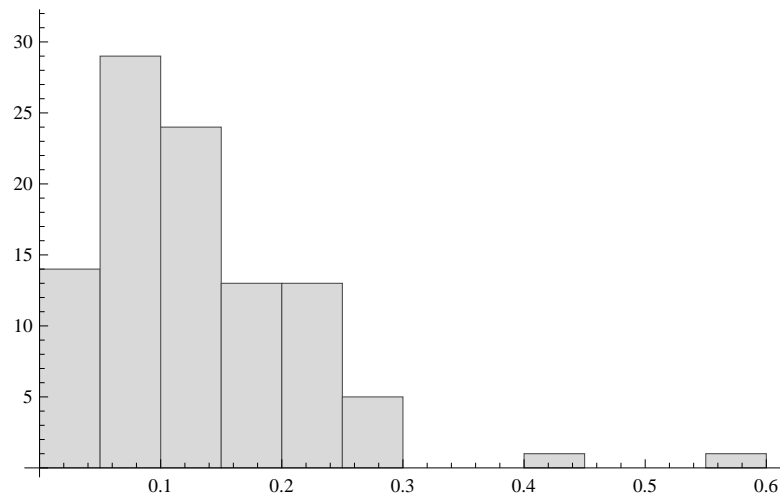


Obrázek 3.6: Dvojice odhadů $\{\hat{\mu}, \hat{\alpha}\}$.

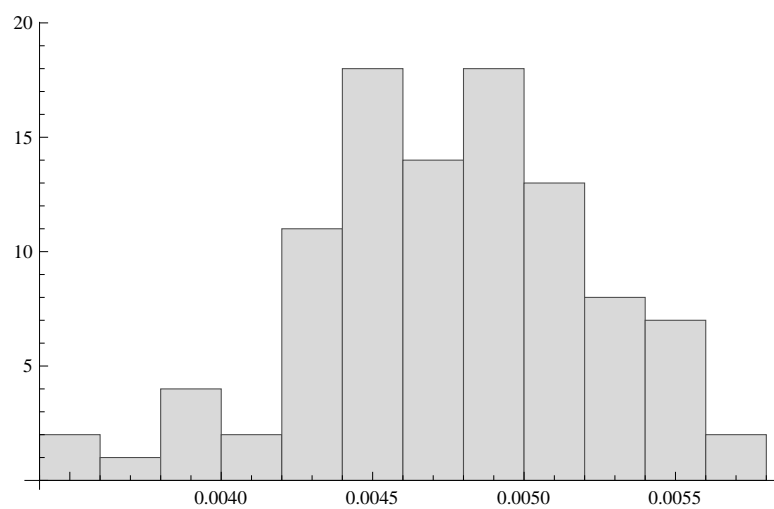
Zdá se, že hodnota rovnovážná úrovně, která je pro nás důležitá, je odhadnuta velmi přesně. Naopak parametr rychlosti konvergence, který je také důležitý pro predikci, není odhadnut přesně. Bude zajímavé také zjistit, zda odhady $\hat{\mu}$ a $\hat{\alpha}$ neleží na přímce, nebo zda se dvojice těchto odhadů neshlukují u nějakého bodu. Graf 3.6 nám pomůže tyto hypotézy zmapovat. Při pohledu na něj nelze žádnou



Obrázek 3.7: Histogram odhadů $\hat{\mu}$.



Obrázek 3.8: Histogram odhadů $\hat{\alpha}$.



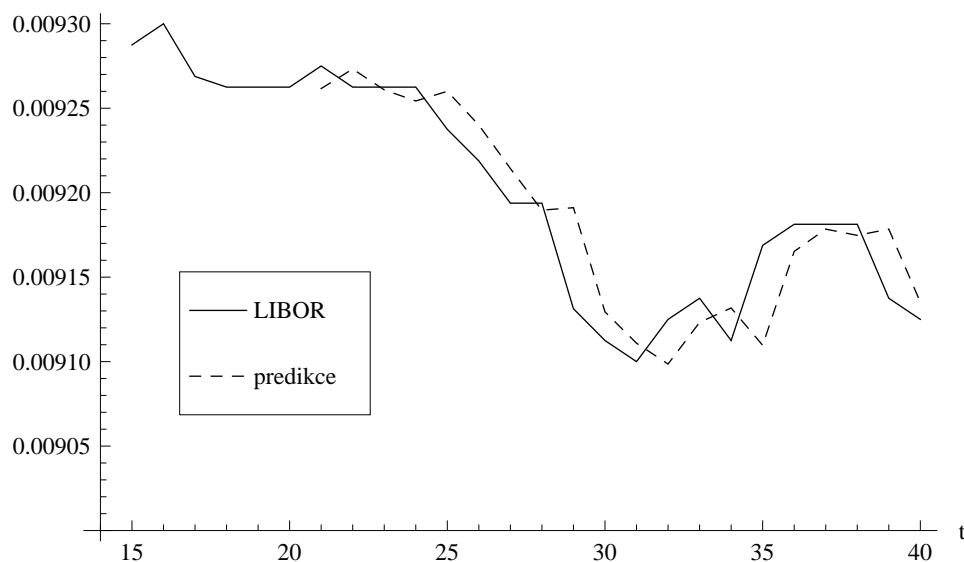
Obrázek 3.9: Histogram odhadů $\hat{\sigma}$.

takovou domněnku potvrdit, pouze se projevuje nepřesnost odhadu parametru α .

Pro hlubší analýzu výsledků se podívejme ještě na histogramy jednotlivých odhadů na obr. 3.7, 3.8 a 3.9. Ty potvrzují, že odhady $\hat{\mu}$ a $\hat{\sigma}$ poměrně spolehlivě přibližují skutečné hodnoty parametrů.

3.2 Metoda maximální věrohodnosti

Kalibrace metodou maximální věrohodnosti je z našich metod nejkomplikovanější co se týče výpočetní složitosti a citlivosti na konvergenci (při minimalizaci logaritmické věrohodnostní funkce). Provedeme analogické studie jako u metody OLS pro porovnání výsledků. Budeme tedy kalibrovat CIR model v diskretizaci (1.9) ($\Delta = 1$) za pomoci metody popsané pomocí (2.3). Odhadněme parametry μ a α ze 192 denních kótací 6-měsíční úrokové sazby LIBOR z roku 2010. Obecně lepších výsledků konvergence metody MLE jsme dostali, pokud ji implementujeme za použití hustoty necentrovaneho χ^2 rozdělení (s příslušnou transformací) namísto přímého použití vztahu (1.13). Ani tak však maximalizaci složité logaritmické věrohodnostní funkce nekonverguje. Jak upozorňuje už Kladívko ([10]), pro správnou funkčnost metody je stěžejní určit počáteční odhady pro odstartování iterační maximalizace. Ty budeme v celé této části dostávat pomocí metody OLS - přesněji řečeno, v Mathematice se udává interval pro počáteční odhad, je-li tedy $\hat{\theta}_{OLS}$ odhad strukturálního parametru prostřednictvím metody OLS, vezmeme za interval pro počáteční odhad $(0.99\hat{\theta}_{OLS}, 1.01\hat{\theta}_{OLS})$. Pro maximalizaci standardně Mathematica používá Nelder-Meadovu simplexu (ostatní metody, které jsme zkoušeli, byly méně účinné) [10]. Průběh konvergence lze pro zajímavost najít v tabulce 3.1 na konci práce.



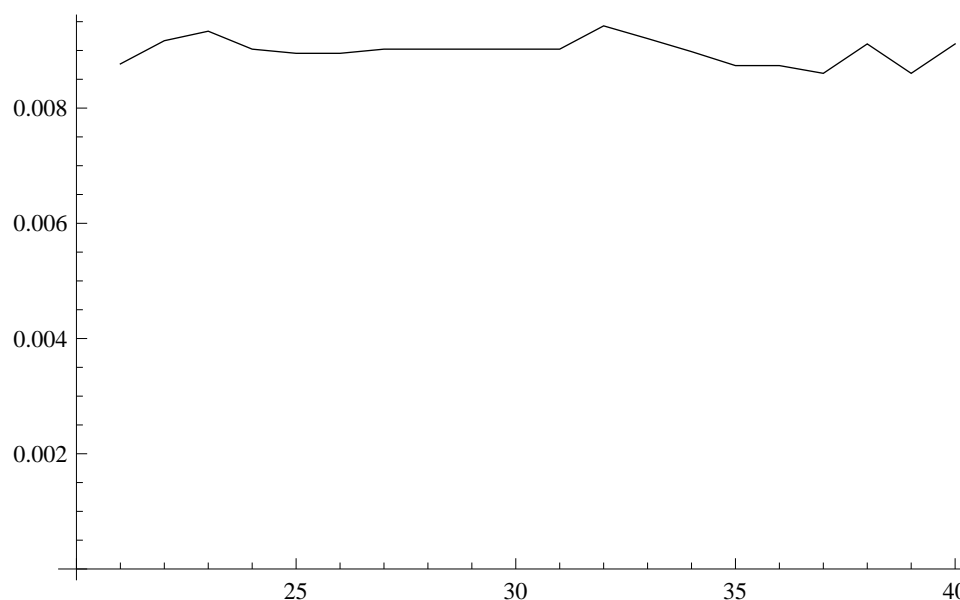
Obrázek 3.10: Porovnání skutečného vývoje a predikce založené na poslední (20.) kalibrované kótaci.

Jak vidíme, výsledky kalibrace se liší od předchozí metody:

$$(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\sigma}) = (0.02100, 0.004490, 0.00003612).$$

Tato kalibrace očekává nižší rovnovážnou hodnotu (2.1%) a rychlejší tempo konvergence. Pokud se podíváme na predikci první kótace roku 2012, takto nakalibrovaný model dává 1.69% (oproti 1.28% pomocí metody OLS). Připomeňme, že první kótace v červnu 2011 sazby 6M LIBOR na Euro byla 1.66%, dá se tedy očekávat, že metoda MLE odhadla směřování trhu lépe.

Nyní zopakujme postup pro průběžný odhad denní kótace pro 21. až 40. kótaci roku 2010 za předpokladu znalosti posledních 20 kótací v daném čase. Jako počáteční odhad se ukázala jako vhodné vzít pro všech 20 kalibrací odhad parametrů pomocí OLS metody z prvních 20 kótací (tedy pro všech 20 výpočtů jsme vzali stejný interval pro počáteční odhad). Vzhledem ke komplikacím s konvergencí jsme pak ještě dali na počáteční odhad další podmínky (minimální/maximální výše některých parametrů pro správné vyčíslení implementovaných funkcí). Graf 3.10 nám prozrazuje, že výsledky jsou srovnatelné s metodou OLS, kde jsme konstatovali, že tato metoda predikce není odpovídající.



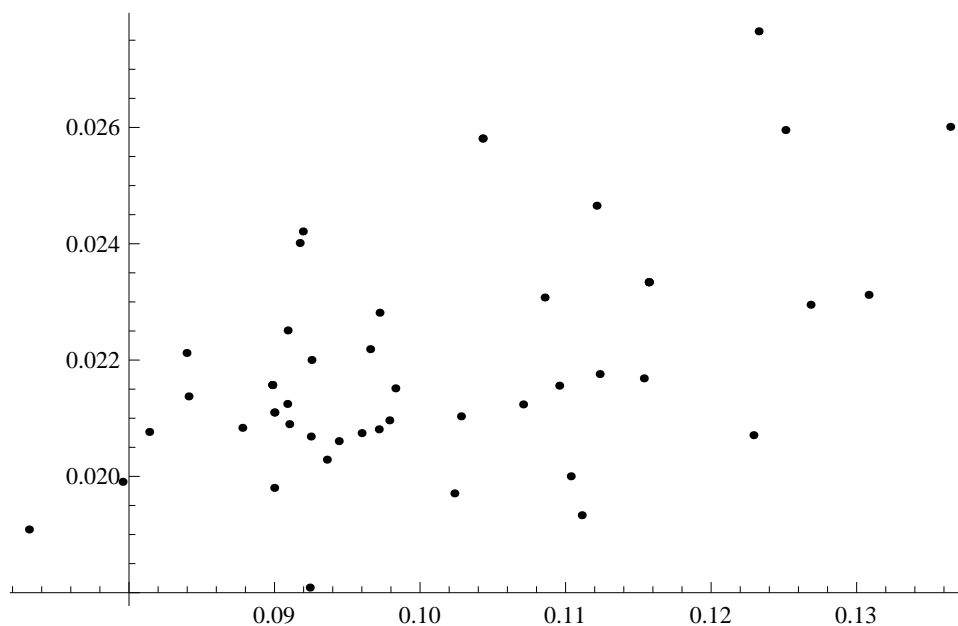
Obrázek 3.11: Vývoj odhadu parametru μ .

V čem je ale tato metoda lepší se můžeme přesvědčit v grafu 3.11. Zatímco metoda OLS byla nestabilní v tom smyslu, že průběžné odhady rovnovážné hodnoty vykazovaly významné kolísání, u metody OLS nic takového nepozorujeme.

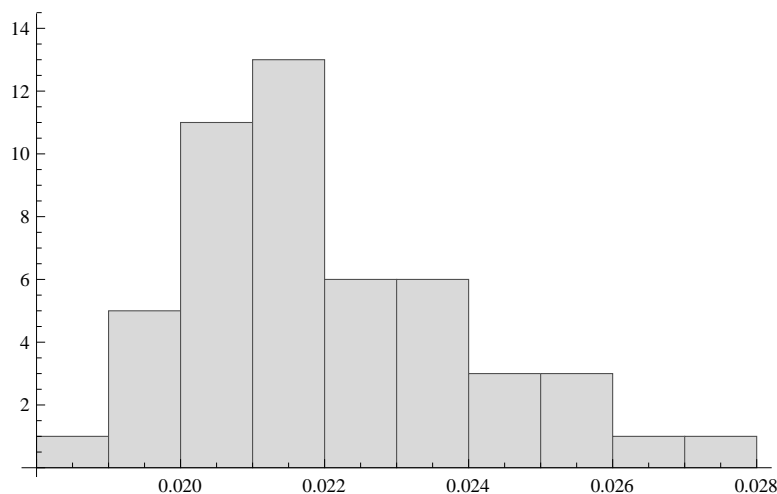
Pokračujme jako v předchozí části se simulační studií. Vzhledem k časové složitosti výpočtu a složitosti kalibrace vezmeme pouze 50 simulací (každá opět délky 50). Metodiku pro počáteční odhad převezmeme z předchozího odstavce - vezmeme OLS odhad parametrů první simulace (doplňený o další podmínky) a použijeme ho jako startovací bod pro všech 50 maximalizačních úloh. Připomeňme, že skutečné parametry pro generování simulací (scénářů) byly $\mu = 2\%$, $\alpha = 0.05$, $\sigma = 0.005$ a počáteční hodnota (v čase 1) $r_0 = 2.5\%$. Výsledky pro tento klesající scénář s poměrně rychlou konvergencí k rovnovážné úrovni nejsou o nic uspokojivější než u metody OLS. Průměrné hodnoty odhadů (neboli odhad pomocí metody Monte Carlo) jsou vidět v tabulce 3.2.

skutečné hodnoty	$\mu = 0.0200$	$\alpha = 0.0500$	$\sigma = 0.00500$
odhadnuté hodnoty	$\tilde{\mu} = 0.0220$	$\tilde{\alpha} = 0.1013$	$\tilde{\sigma} = 0.00259$

Zatímco rovnovážná úroveň je odhadnuta relativně nestranně, rychlost konvergence je odhadnuta lépe než u metody nejmenších čtverců, parametr volatility však hůře. Za vhodnou kombinaci lze považovat odhad $\hat{\mu}$ pomocí OLS nebo MLE, odhad $\hat{\alpha}$ metodou maximální věrohodnosti a $\hat{\mu}$ pomocí metody nejmenších čtverců. Co je ale důležité a může hrát roli v nepřesně odhadnutém parametru rychlosti konvergence je, že jsme prokázali, že podobnou chybu vykazovala metoda OLS, která nám dala počáteční odhad. S tím, že počáteční odhad má rozhodující vliv na úspěšnost kalibrace a přesnost výsledku, se budeme samozřejmě setkávat i v praxi, není tedy nekorektní toto zkreslení promítnout do simulační studie. Pro ilustraci uveďme ještě graf 3.12 zobrazující dvojice odhadnutých parametrů (opět nepozorujeme zřejmou regresní souvislost) a histogram pro odhady parametru rovnovážné hladiny (graf 3.13).



Obrázek 3.12: Dvojice odhadů $\{\hat{\mu}, \hat{\alpha}\}$.



Obrázek 3.13: Histogram odhadů $\hat{\mu}$.

3.3 Obecná momentová metoda

Obecná momentová metoda je obecně velmi silný nástroj pro praktické použití, nezávisí tak jako MLE na počátečních odhadech a nezpůsobuje komplikace problematickou konvergencí. Zároveň však není tak transparentní jako MLE a vyžaduje důkladné otestování, aby mohla být brána za seriózní. Použijeme ji na obdobná data a úlohy, jako předchozí metody, abychom měli empirické srovnání. Ačkoliv budeme pracovat v diskretizaci (1.10), pro vazbu na předchozí výsledky budeme uvádět odhadnuté parametry přepočtené do diskretizace (1.9).

Začneme kalibrací na všech 192 denních kótací sazby LIBOR. Výpočet je tentokrát rychlý a zcela bezproblémový. Výsledky ukazují opět trochu odlišnou dynamiku od předchozích srovnání:

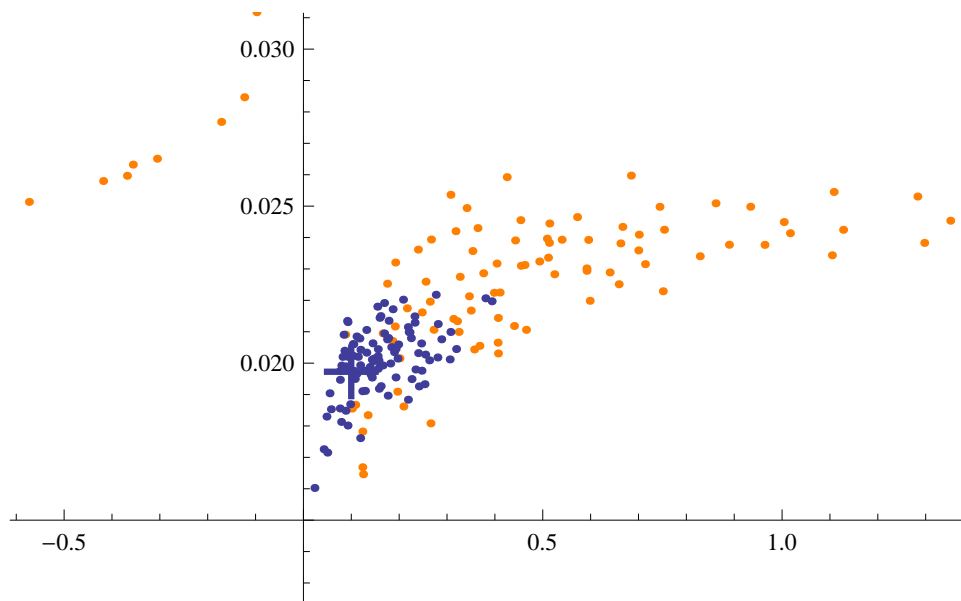
$$(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\sigma}) = (0.02327, 0.01018, 0.001162).$$

V porovnání s výsledky MLE vidíme obdobnou ekvilibriální úroveň, ale rychlejší konvergenci a vyšší volatilitu. I predikce pro začátek roku 2012 je díky tomu vyšší, vychází 2.16%. Udělejme ještě predikci pro polovinu roku 2011, u které již máme skutečná data pro srovnání, tu takto nastavený model odhaduje na úrovni 1.80%, což je poměrně blízké skutečné úrovni (1.66%).

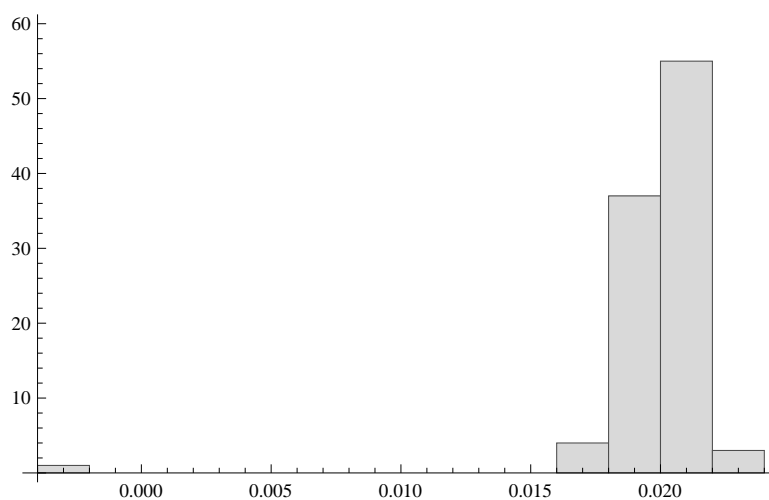
Průběžná kalibrace na data LIBOR nepřinesla racionální výsledky, je tedy třeba metodu důkladně otestovat z hlediska přesnosti určování parametrů. Provedme simulační studii o 100 simulacích délky 50 (volíme $a = 0.1$ a ostatní parametry stejně jako v minulých částech). Trochu upravíme dosavadní postup a vygenerujeme ještě 100 simulací délky 6. Zkusíme odhadnout parametry v obou sadách simulací abychom se přesvědčili, zda vyšší počet historických pozorování dává přesnější odhad.

skutečné hodnoty	$\mu = 0.0200$	$\alpha = 0.0500$	$\sigma = 0.00500$
odhadnuté hodnoty (krátká)	$\tilde{\mu} = 0.0240$	$\tilde{\alpha} = 0.4028$	$\tilde{\sigma} = 0.00236$
odhadnuté hodnoty (dlouhá)	$\tilde{\mu} = 0.0199$	$\tilde{\alpha} = 0.1598$	$\tilde{\sigma} = 0.00328$

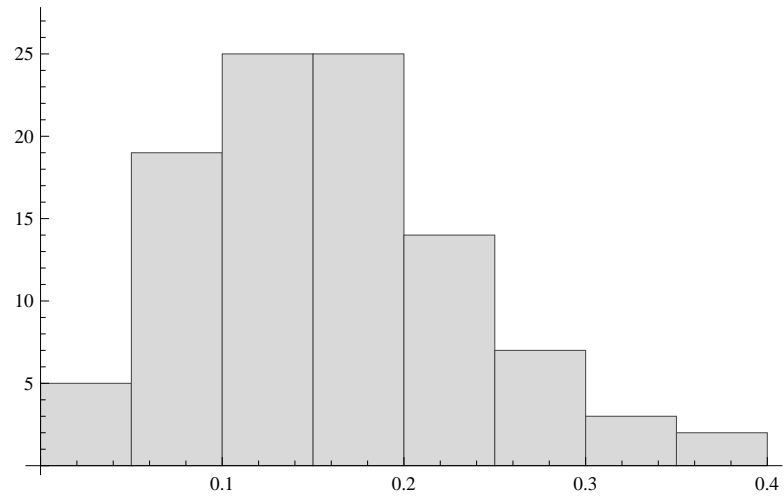
V tabulce 3.3 vidíme, že vyšší počet pozorování opravdu přiblížil odhadnuté parametry v průměru k jejich skutečným hodnotám. Podívejme se v grafu 3.14 na dvojice odhadů jak u krátkých (oranžově), tak u dlouhých simulací (modře). Křížek označující dvojici skutečných parametrů také ilustruje, že odhady z dlouhé posloupnosti jsou vesměs blíže skutečné hodnotě. Obrázky 3.15, 3.16 a 3.17 ještě ukazují histogramy odhadů parametrů pomocí GMM z dlouhých simulací.



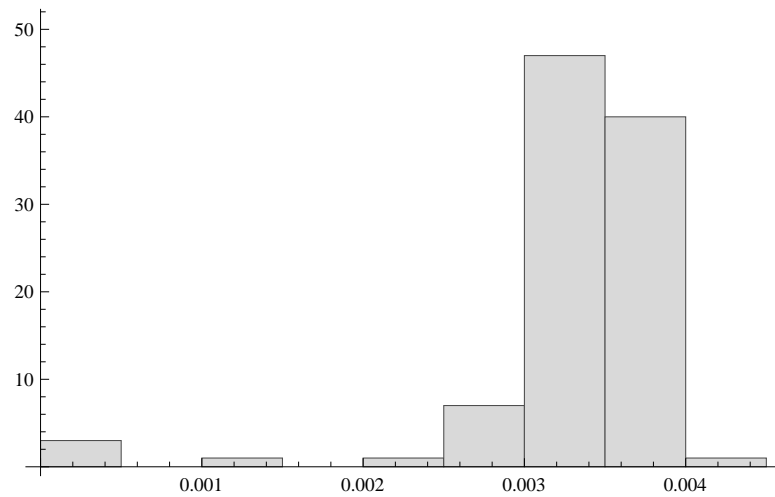
Obrázek 3.14: Dvojice odhadů $\{\hat{\mu}, \hat{\alpha}\}$ - z krátkých simulací oranžově, z dlouhých modře (kříž značí skutečnou dvojici parametrů).



Obrázek 3.15: Histogram odhadů $\hat{\mu}$.



Obrázek 3.16: Histogram odhadů $\hat{\alpha}$.



Obrázek 3.17: Histogram odhadů $\hat{\sigma}$.

Závěr

Tato práce představila některé v praxi používané modely úrokových měr a zaměřila se na model CIR a jeho praktickou implementaci. Stěžejní součástí implementační části je kalibrace parametrů modelu na základě historických dat, proto byl velký prostor věnován metodám, pomocí kterých lze odhad realizovat. Rozebrány byly tři konkrétní metody: metoda nejmenších čtverců, metoda maximální věrohodnosti a obecná momentová metoda. Všechny byly rozpracovány nejen obecně, ale přímo pro účely použití na CIR model. Dosud publikované články se v souvislosti s tímto modelem věnují implementaci vždy pouze v kontextu jedné metody, tato práce tedy představuje zajímavý přehled možností implementace.

V klíčové kapitole, která se věnovala softwarové realizaci teoreticky zpracovaných metod, byl model CIR kalibrován na reálná i simulovaná data. Pro implementaci byl použit software Wolfram Mathematica 8. Metoda nejmenších čtverců, které v dosud publikovaných člancích nebyla přisuzována příliš vysoká kredibilita, se ukázala být poměrně kvalitním nástrojem pro odhad dvou ze tří potřebných parametrů. Citlivější analýza odhalila, že ačkoliv je tato metoda výpočetně nejjednodušší ze všech diskutovaných možností, nemusí být její odhady stabilní. Celkově může být vhodná ve složitějších situacích, kdy ostatní metody (numericky) selhávají, nebo alespoň může sloužit pro získání počátečních odhadů či stanovení jen jednoho nebo dvou parametrů modelu.

Metoda maximální věrohodnosti je obecně sofistikovanější metodou pro odhad parametrů, což je na druhé straně spojeno s vysokou náročností na numerický výpočet. Při citlivém použití počátečních odhadů a požadované přesnosti výpočtu je časová složitost únosná, ačkoliv při vyšším počtu kalibrací naráz je nutné výpočet zdoluhavě ladit. Z hlediska stability odhadu podala tato metoda přesvědčivější výsledky než OLS. Co se týká nestrannosti odhadu u simulovaných dat, metoda maximální věrohodnosti nepřekonala zmíněnou metodu nejmenších čtverců.

Obecná momentová metoda je v porovnání s MLE stabilnější v konvergenci výpočtu. Odhady parametrů pomocí této metody jak u historických, tak simulovaných dat byly uspokojivé. Nejtěžším parametrem pro odhad zůstává napříč všemi metodami parametr rychlosti konvergence, který je důležitý pro predikci budoucích hodnot úrokových měr. V simulační úloze potvrdila metoda GMM pozitivní vlastnost konzistence ve smyslu zpřesnění odhadu při poskytnutí delšího úseku časové řady.

Seznam použité literatury

- [1] ANDĚL, J. *Statistické metody*. 4. vydání. Matfyzpress, 2007. ISBN 80-7378-003-8.
- [2] BALDVINSDÓTTIR, E.K. - PALMBORG, L. *On Constructing a Market Consistent Economic Scenario Generator* [online]. Poslední revize 4.3.2011 [cit. 19.6.2011]. <<http://www.math.kth.se/matstat/seminarier/reports/M-exjobb11/110317a.pdf>>.
- [3] BOLDER, D.J. *Affine Term-Structure Models: Theory and Implementation* [online]. Poslední revize říjen 2001 [cit. 20.6.2011]. Financial Markets Department, Bank of Canada. <<http://www.bankofcanada.ca/wp-content/uploads/2010/02/wp01-15a.pdf>>.
- [4] BRIGO, D. - MERCURIO, F. *Interest Rate Models - Theory and Practice*. 2. vydání. Springer, 2006. 1037 s. ISBN 978-3-540-22149-4.
- [5] CHAN, K.C. - KAROLYI, G.A. - LONGSTAFF, F.A. - SANDERS, A.B. An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate. *The Journal of Finance*, 1992, vol. 47, no. 3, s. 1209-1227.
- [6] COX, J.C. - INGERSOLL, J.E. - ROSS, S.A. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 1985, vol. 53, s. 385-407.
- [7] DE ROSSI, G. Maximum Likelihood Estimation of the Cox-Ingersoll-Ross Model Using Particle Filters. *Computing in Economics and Finance*, 2004, no. 302.
- [8] *EconStats - LIBOR in Euro (EUR)* [online]. [cit. 19.6.2011]. <http://www.econstats.com/r/rlib__d9.htm>.
- [9] JAMES, J. - WEBBER, N. *Interest Rate Modelling*. 1. vydání. John Wiley & Sons Ltd, 2000. 654 s. ISBN 978-0471-97523-6.
- [10] KLADÍVKO, K. Maximum Likelihood Estimation of the Cox-Ingersoll-Ross Process: The Matlab Implementation. *Technical Computing Prague*, 2007.
- [11] HOLICKÝ, P. - KALENDA, F.K. *Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy*. 2. vydání. Matfyzpress, 2006. ISBN 80-86732-72-X.
- [12] HULL, J.C. *Options, Futures and Other Derivatives*. 7. vydání. Pearson Prentice Hall, 2008. 814 s. ISBN 978-0-13-500994-9

Seznam tabulek

Iterace	$\hat{\mu}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$	$l(\hat{\theta})$
1	0.0709105	0.000124828	0.0000305630	1650.83
2	0.0703389	0.000124945	0.0000304248	1656.48
3	0.0707710	0.000123573	0.0000306407	1668.36
4	0.0700781	0.000125129	0.0000304443	1660.58
5	0.0698815	0.000124271	0.0000304435	1672.69
6	0.0693670	0.000123992	0.0000303838	1683.47
7	0.0698052	0.000123518	0.0000305544	1684.84
8	0.0695383	0.000122804	0.0000306192	1698.57
9	0.0697061	0.000121783	0.0000306515	1705.77
10	0.0695201	0.000120111	0.0000307550	1727.31
11	0.0681792	0.000121031	0.0000305313	1736.94
12	0.0668834	0.000119760	0.0000304766	1769.15
13	0.0679275	0.000117791	0.0000308501	1777.24
14	0.0672077	0.000114691	0.0000310832	1818.96
15	0.0662025	0.000113571	0.0000309241	1839.23
16	0.0645346	0.000108954	0.0000310766	1898.10
17	0.0628970	0.000108827	0.0000310026	1919.06
18	0.0595855	0.000103185	0.0000311263	1992.06
19	0.0606685	0.000098126	0.0000317141	2012.74
20	0.0575611	0.000087309	0.0000323328	2089.08
21	0.0539131	0.000084941	0.0000319406	2119.66
22	0.0472657	0.000070066	0.0000323693	2187.78
23	0.0450737	0.000064752	0.0000328091	2202.21
24	0.0353432	0.000042651	0.0000336753	2234.60
25	0.0338612	0.000030166	0.0000344587	2236.12
26	0.0209990	0.004489680	0.0000361248	109061.00

Tabulka 3.1: Mezikroky při iterační maximalizaci logaritmicke věrohodnostní funkce při kalibraci modelu CIR na 192 denních kótací 6-měsíční úrokové sazby LIBOR v roce 2010.