Nadační fond
pro podporu vzdělávání
v pojišťovnictví

Aplikace teoretických postupů pro ocenění rizika při upisování pojistných smluv v oblasti velkých rizik

Ondřej Pavlačka

Praha, 18. ledna 2011

Cíle projektu

- Vytvořit matematický model pro oceňování přijímaného rizika z hlediska
  - očekávaného zisku,
  - nákladu na kapitál.
- Model umožní v průběhu upisovacího roku sledovat, jak underwriteři nakládají s kapitálem:
  - zda jimi zvolená cenová politika odpovídá požadované míře zhodnocení vloženého kapitálu,
  - zda upisované rizikové portfolio nevybočuje z pravidel Solvency 2.

Rámcová podoba modelu

- V rámci daného druhu pojištění si pojistitel nastaví:
  - **velikost obchodních a provozních nákladů** (v % pojistného),
  - **objem kapitálu** alokovaného na daný druh pojištění (VK),
  - **požadovaný rating** = kolik % regulatorně požadovaného kapitálu (dle S2) má tvořit alokovaný kapitál,
  - **požadovaný zisk** (ROE_{poz}) = investory požadovaná hodnota očekávaného ROE (v % VK).

Rámcová podoba modelu

- Underwriter zařadí upisované riziko do jedné z předdefinovaných kategorií rizikovosti na základě dvou faktorů:
  a) rozdělení pravděpodobnosti realizace škody,
  b) rozdělení pravděpodobnosti poměru vzniklé škody vzhledem k PML.

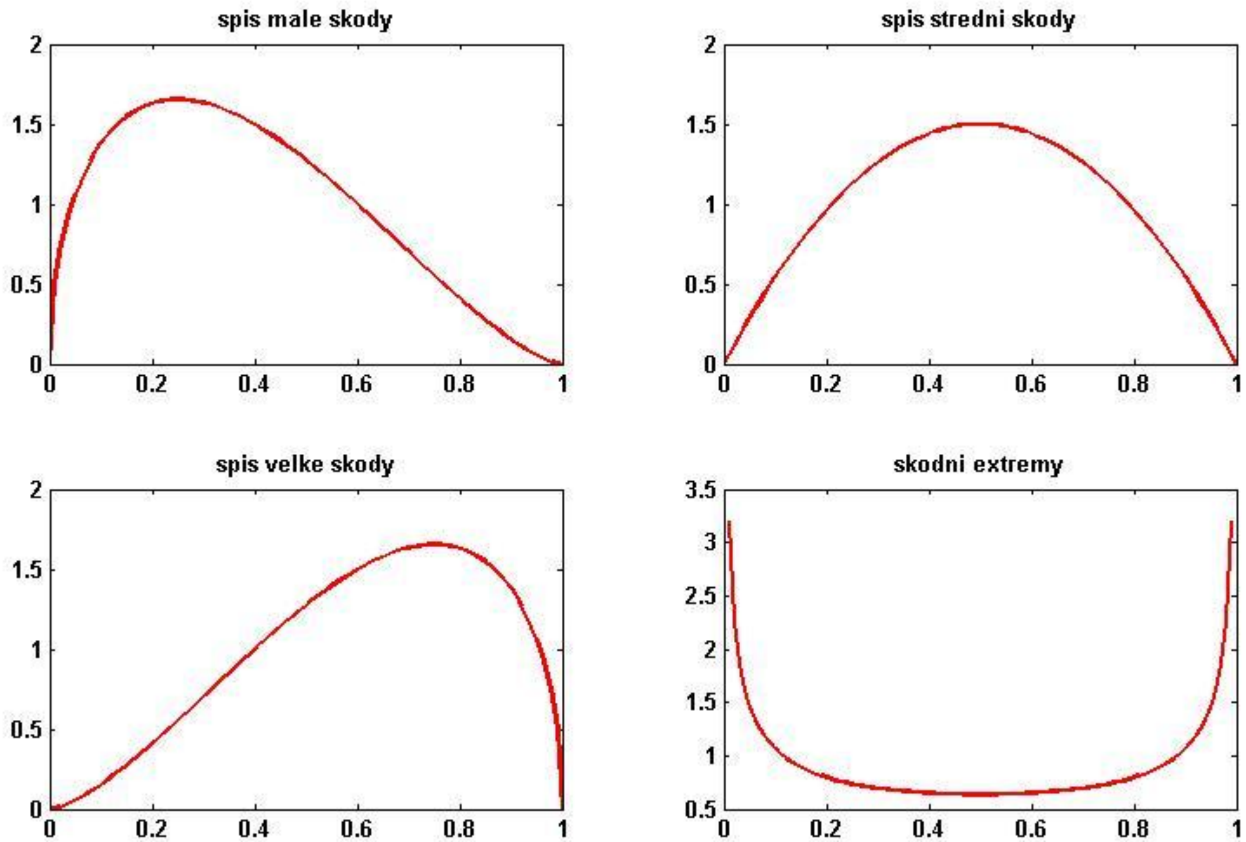
Rámcová podoba modelu

- **Rozdělení pravděpodobnosti realizace škody:**
  - Předdefinuje se několik nejčastějších rozdělení pravděpodobnosti s konkrétními parametry, např.
    - Poissonovo,
    - Negativně-binomické, atp.
  - Je možné je pro názornost pojmenovat slovně, např.
    - „téměř žádné nebezpečí vzniku škody“ …
    - „velké nebezpečí vzniku škody“.

Rámcová podoba modelu

- **rozdělení pravděpodobnosti poměru vzniklé škody vzhledem k PML:**
  - Předdefinuje se několik kategorií % rozdělení škody vzhledem k PML.
  - Uvažovat lze např. beta rozdělení s různými parametry, jednotlivé třídy lze přitom opět slovně pojmenovat, např.
    - „spíše malé (střední, velké) škody“,
    - „škodní extrémy“ (minimální nebo maximální škody),
    - atpod.

Rámcová podoba modelu



Rámcová podoba modelu

- **Dále underwriter zadá:**
  - PML a pojistnou částku,
  - sazbu, za kterou by chtěl dané riziko upsat.

- **Model pak spočítá výsledné hodnoty:**
  - RAC ... regulatorně požadovaný kapitál (se zahrnutým požadovaným ratingem) na krytí jím upsaných pojistných smluv,
  - ROE ... hodnotu očekávaného ROE,
  - ŠP ... očekávaný škodní poměr.

Aktuální podoba modelu

- Momentálně můžeme modelovat situaci, kdy

všechny upisované smlouvy spadají do stejné kategorie rizikovosti, ale mají různě vysoké PML (pro jednoduchost se předpokládá, že pojistná částka = PML).

- Na daném modelu lze analyzovat, **jaký vliv má nestejnorodost PML na jednotlivých smlouvách na výsledný RAC**.

Aktuální podoba modelu

- **Vstupní parametry:**

  Š ... náhodná veličina představující plnění z jedné pojistné smlouvy s jednotkovou PML za 1 rok,

  EŠ ... střední hodnota náhodné veličiny Š,

  n ... počet smluv,

  pojistne ... celkové předepsané pojistné z daného souboru smluv,

Aktuální podoba modelu

- **Vstupní parametry:**

  $SUMA_{PML}$ ... souhrn PML ze všech smluv,

  $MEAN_{PML}$ ... průměrná hodnota PML,

  STD_{PML} … směrodatná odchylka souboru hodnot PML,

  $SKEW_{PML}$ … šikmost souboru hodnot PML, je nulová, jestliže $STD_{PML} = 0$, jinak

$$SKEW_{PML} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(PML_i - MEAN_{PML})^3}{{STD_{PML}}^3}.$$

Aktuální podoba modelu

- **Průměrná pojistná sazba (PS)**, za kterou underwriter upisuje riziko, je dána vztahem

$$\boxed{PS = \frac{pojistne}{SUMA_{PML}} = \frac{pojistne}{n \cdot MEAN_{PML}}.}$$

- Závislost **průměrného plnění** (PP) na počtu smluv – z předpokladů plyne, že jde o lineární funkci

$$\boxed{PP(n) = n \cdot MEAN_{PML} \cdot EŠ.}$$

Aktuální podoba modelu

- **Očekávaný škodní poměr (ŠP)** a **očekávaná hodnota ROE** (v % VK) ze souboru smluv pak lze vyjádřit následovně:

$$\boxed{ŠP = \frac{PP(n)}{pojistne} = \frac{EŠ}{PS},}$$

$$\boxed{ROE = \frac{pojistne \cdot (1 - naklady) - PP(n)}{VK}.}$$

Aktuální podoba modelu

- **Spotřebovaný kapitál** dle metodiky Solvency 2 se zohledněním ratingu (RAC – Risk Adjusted Capital) je dán vztahem:

$$\boxed{RAC = rating \cdot [Q_{0,995} - pojistne \cdot (1 - naklady)]}$$

- $Q_{0,995}$ **= 0,995-kvantil celkových škod (plnění) z daného souboru smluv v daném roce**.

Určení $Q_{0,995}$

- **Klíčovou věcí v modelu** je určit 0,995-kvantil celkových škod z daného souboru smluv v 1 roce, vše ostatní lze přímo vypočítat ze zadaných veličin.
- $Q_{0,995}$ z daného souboru *n* smluv lze vyjádřit

$$\boxed{Q_{0,995} = PP(n) + R,}$$

kde *R* značí zbytek k průměrnému plnění, který lze aproximovat dále popsaným postupem.

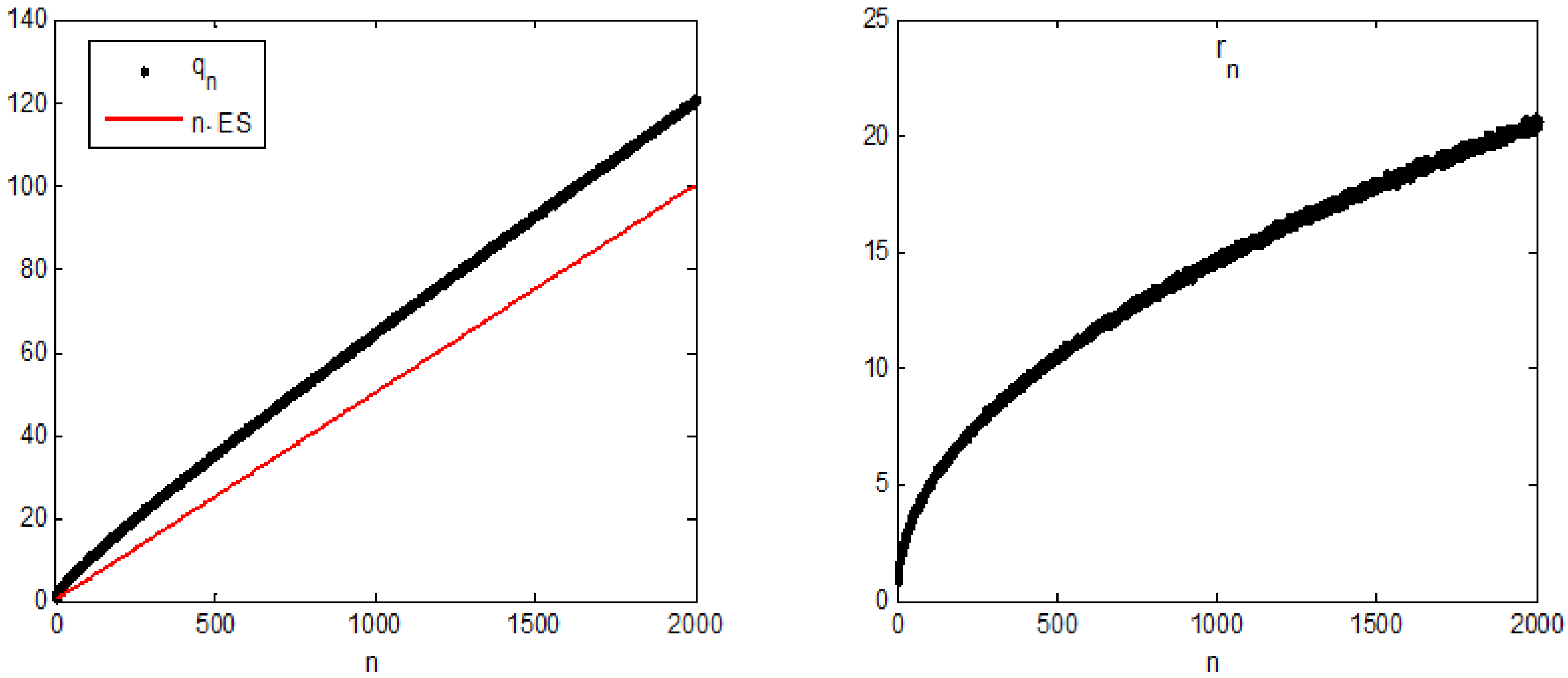
Určení $Q_{0,995}$

- Nejprve se provede odhad funkce $r(n)$ **popisující hodnotu tohoto zbytku v případě, kdy máme** *n* **smluv s jednotkovou PML**:
  - simulací Monte Carlo se pro jednotlivá *n* vygenerují hodnoty plnění,
  - z vygenerovaných hodnot se určí empirické 0,995-kvantily q_n a vyčíslí se

$$\boxed{r_n = q_n - n \cdot E\check{S},}$$

  - tyto hodnoty se následně proloží vhodnou regresí $\hat{r}(n)$.

Určení $Q_{0,995}$



Určení $Q_{0,995}$

- Ukázalo se, že **výsledná hodnota *R* závisí na čtyřech parametrech**: *n*, $MEAN_{PML}$, STD_{PML} a $SKEW_{PML}$, tj.

$$R = R(n, MEAN_{PML}, STD_{PML}, SKEW_{PML}).$$

- Pokud $STD_{PML} = 0$, (tím pádem i $SKEW_{PML} = 0$), tj. pro všechny smlouvy platí $PML = MEAN_{PML}$, pak

$$R(n, MEAN_{PML}, 0{,}0) = MEAN_{PML} \cdot \hat{r}(n).$$

Určení $Q_{0,995}$

- Tato hodnota je dle očekávání nejmenší možná pro daný počet smluv a danou MEAN_{PML}.
- S rostoucí STD_{PML} hodnota *R* roste, vliv tohoto růstu navíc ovlivňuje SKEW_{PML}.
- Záporná SKEW_{PML} (převaha smluv s větší PML než průměrnou) jej zmenšuje, kladná SKEW_{PML} jej zvětšuje.
- Vše navíc závisí na počtu smluv, kdy s rostoucím *n* se vliv STD_{PML} a SKEW_{PML} zmenšuje.

Určení $Q_{0,995}$

- Formálně to můžeme zapsat jako

$$\boxed{R(n, MEAN_{PML}, STD_{PML}, SKEW_{PML}) = k \cdot MEAN_{PML} \cdot \hat{r}(n),}$$

kde koeficient $k \geq 1$ závisí na všech proměnných $n, MEAN_{PML}, STD_{PML}$ a $SKEW_{PML}$, přičemž

$$\boxed{k = 1}$$

jen v případě nulové směrodatné odchylky.

Určení *k* v případě nulové SKEW$_{PML}$

- Nejprve byla zkoumána hodnota *k* v případě, kdy je soubor PML jednotlivých smluv symetrický, tj.

$$\boxed{SKEW_{PML} = 0.}$$

- Ukázalo se, že hodnota *k* závisí v tomto případě na počtu smluv *n* a na *variačním koeficientu* souboru PML,

$$\boxed{V_{PML} = \frac{STD_{PML}}{MEAN_{PML}}.}$$

Určení *k* v případě nulové $\mathrm{SKEW}_{\mathrm{PML}}$

- V případě nulové šikmosti nabývá variační koeficient V_{PML} hodnot mezi 0 a 1, přičemž V_{PML}=1 jen v případě sudého počtu smluv, kdy má polovina smluv nulovou PML a druhá polovina má

$$\boxed{PML = 2 \cdot MEAN_{PML}.}$$

- To je ekvivalentní se situací, kdy máme jen poloviční počet smluv s identickou PML rovnu dvojnásobku průměrné PML.

Určení *k* v případě nulové SKEW_{PML}

- Jelikož pro pevné *n* s rostoucí hodnotou V_{PML} hodnota *k* roste, nabude *k* pro každé sudé *n* svého maxima $k_{max}(n)$ v případě, že $V_{PML} = 1$, tj. $STD_{PML} = MEAN_{PML}$.
- Odhad hodnoty $k_{max}(n)$ získáme pro každé sudé *n* následovně:

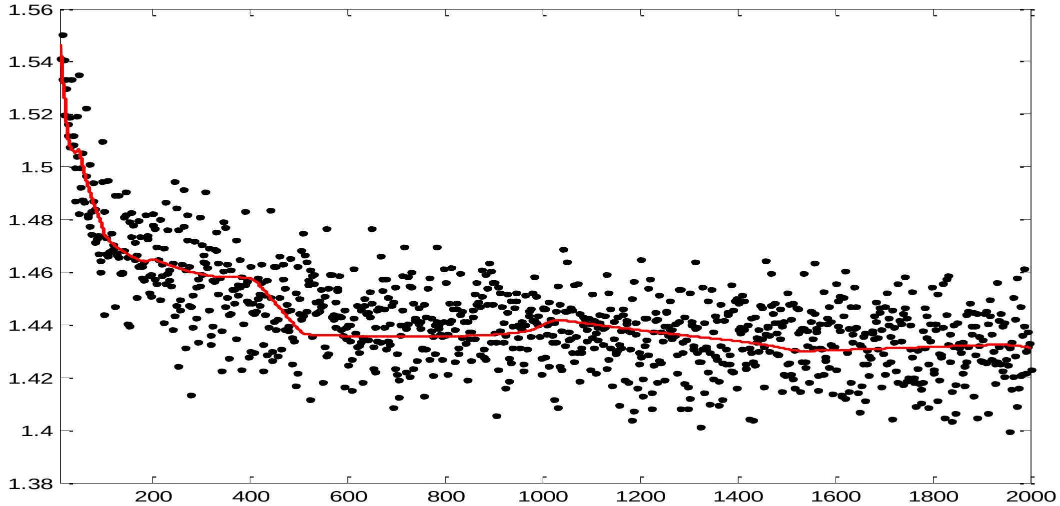
$$R(n, MEAN_{PML}, MEAN_{PML}, 0) = R\left({}^{n}/_{2}, 2 \cdot MEAN_{PML}, 0{,}0\right)$$

$$k_{max}(n) \cdot MEAN_{PML} \cdot \hat{r}(n) = 2 \cdot MEAN_{PML} \cdot \hat{r}(n/2)$$

$$k_{max}(n) = \frac{2 \cdot \hat{r}(n/2)}{\hat{r}(n)}.$$

Určení *k* v případě nulové SKEW_{PML}

- Z charakteru funkce $\hat{r}(n)$ plyne, že s rostoucím počtem smluv hodnota $k_{max}(n)$ klesá.
- Testování ukázalo, že přesnost odhadu $k_{max}(n)$ výrazně závisí na přesnosti odhadu $\hat{r}(n)$.



Určení *k* v případě nulové SKEW$_{PML}$

- **Odhady koeficientu *k* pro různé *n* a V_{PML} získáme následovně:**
  - Budeme uvažovat hypotetické soubory smluv, kde vždy polovina smluv bude mít PML=PML$_1$ a druhá polovina smluv PML=PML$_2$.
  - PML$_1$ a PML$_2$ volíme tak, aby byla stejná směrodatná odchylka STD$_{PML}$, ale rostl průměr $MEAN_{PML} = PML_1 + PML_2$, např. 10-1010, 20-1020,…,2000-3000.

Určení *k* v případě nulové SKEW_{PML}

- **Odhady koeficientu *k* pro různé *n* a V_{PML} získáme následovně:**
  - Pro několik pevně zvolených hodnot *n* pak získáme simulací Monte Carlo hodnoty empirických 0,995-kvantilů celkových plnění z těchto souborů smluv.
  - Od nich odečteme průměrná plnění $n \cdot E\check{S}$, čímž dostaneme hodnoty $r(n, V_{PML}) = R(n, MEAN_{PML}, STD_{PML}, 0)$.

Určení *k* v případě nulové SKEW$_{PML}$

- **Odhady koeficientu *k* pro různé *n* a V_{PML} získáme následovně:**
  - Hodnoty $k(n, V_{PML})$ pak získáme následující úvahou

$$r(n, V_{PML}) = k(n, V_{PML}) \cdot MEAN_{PML} \cdot \hat{r}(n)$$

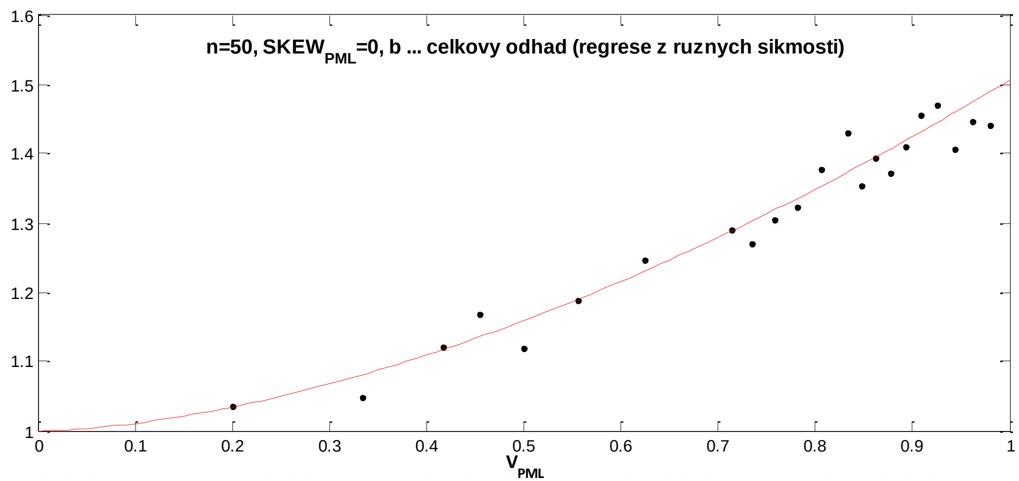
$$k(n, V_{PML}) = \frac{r(n, V_{PML})}{MEAN_{PML} \cdot \hat{r}(n)}.$$

Nadační fond
pro podporu vzdělávání
v pojišťovnictví

Určení *k* v případě nulové SKEW_{PML}

- **Odhady koeficientu *k* pro různé *n* a V_{PML} získáme následovně:**
  - Jako vhodná regresní funkce na proložení hodnot *k* se ukázala býti následující funkce:

$$\boxed{\hat{k}(n, V_{PML}) = 1 + \left(\hat{k}_{max}(n) - 1\right) \cdot {V_{PML}}^{b}.}$$



Určení *k* v případě libovolné SKEW_{PML}

- Dalším cílem pak bylo rozšířit tyto vzorce i na případ nenulové šikmosti.
- Simulace ukázaly, že pro pevně zvolenou šikmost SKEW_{PML} závisí výsledné hodnoty k opět na variačním koeficientu V_{PML} a počtu smluv n.
- Problémem z hlediska využitelnosti vzorce pro $\hat{k}(n, V_{PML})$ však byla skutečnost, že maximální hodnota variačního koeficientu u nenulové šikmosti není rovna jedné, pro záporné šikmosti je menší než jedna, pro kladné naopak větší.

Určení *k* v případě libovolné $\mathrm{SKEW}_{\mathrm{PML}}$

- V předchozím případě bylo užitečné pracovat s hypotetickými soubory smluv se dvěma druhy PML rozdělených stejným dílem mezi jednotlivé smlouvy.
- Podobně můžeme postupovat i v případě nenulové šikmosti.
- Rozdělení PML mezi jednotlivé smlouvy už však nebude půl na půl, je třeba určit odpovídající podíly smluv s PML_1 a s PML_2.

Určení *k* v případě libovolné SKEW$_{PML}$

- Protože statistika šikmost nezávisí na hodnotách PML$_1$ a PML$_2$, položme PML$_1$=0, PML$_2$=1.
- Hledejme $p \in (0,1)$ představující podíl smluv s PML$_2$ takové, že šikmost souboru bude rovna požadované hodnotě SKEW$_{PML}$.
- Dle definice šikmosti platí:

$$SKEW_{PML} = \frac{p \cdot (1-p)^3 + (1-p) \cdot (-p)^3}{\sqrt{p \cdot (1-p)^2 + (1-p) \cdot (-p)^2}^{\,3}}.$$

Nadační fond
pro podporu vzdělávání
v pojišťovnictví

Určení *k* v případě libovolné SKEW_{PML}

- Řešením rovnice pro neznámou *p* (pomocí SW Mathematica) získáme funkci

$$p(SKEW_{PML}) = \frac{4 + {SKEW_{PML}}^2 - SKEW_{PML} \cdot \sqrt{4 + {SKEW_{PML}}^2}}{2 \cdot \left(4 + {SKEW_{PML}}^2\right)}.$$

- Je zřejmé, že $p(0) = 0{,}5$.

Určení *k* v případě libovolné SKEW$_{PML}$

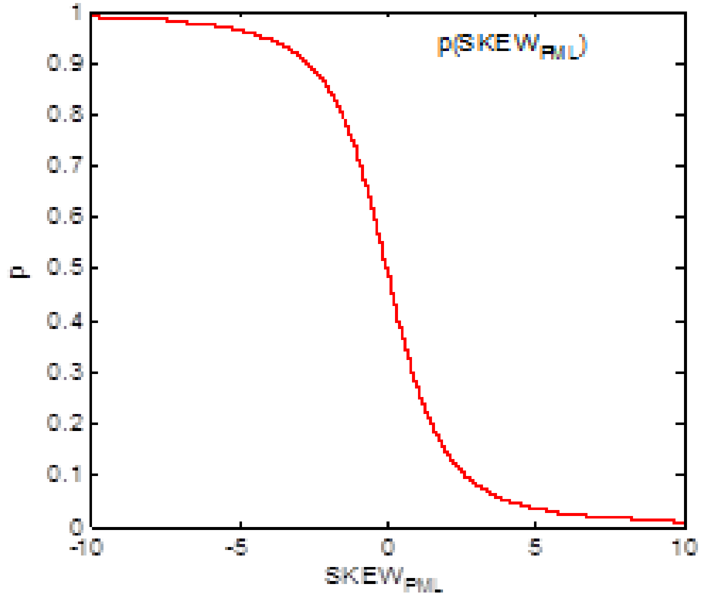
- Variační koeficient pro danou šikmost je opět maximální v případě, že jedna skupina smluv má nulovou PML, řešíme tedy rovnici:

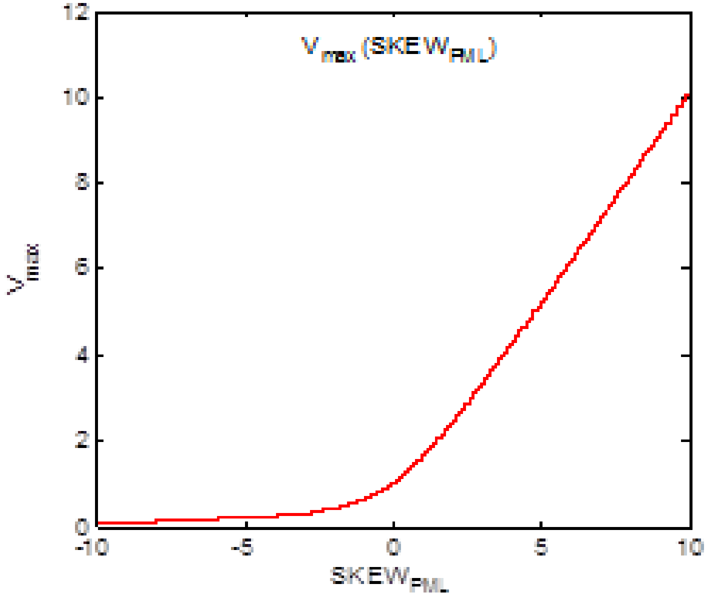
$$V_{max}(p) = \frac{STD_{PML}}{MEAN_{PML}} = \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)^2 + (1-p) \cdot (-p)^2}}{p} = \sqrt{\frac{1-p}{p}},$$

- Protože $V_{max}(0{,}5) = 1$, hodnota maximálního variačního koeficientu v případě symetrického souboru PML je jen speciálním případem výše uvedeného vztahu.

Nadační fond
pro podporu vzdělávání
v pojišťovnictví

Určení *k* v případě libovolné SKEW_{PML}





Určení *k* v případě libovolné SKEW$_{PML}$

- Variační koeficient V_{PML} souboru PML u jednotlivých smluv lze transformovat na interval [0,1] předpisem

$$\boxed{V_T = \frac{V_{PML}}{V_{max}(p)}.}$$

Určení *k* v případě libovolné SKEW$_{PML}$

- I v tomto případě s rostoucím variačním koeficientem roste hodnota koeficientu *k*.
- Maximální hodnota $k_{max}(n, p)$ tohoto koeficientu pro danou šikmost $SKEW_{PML}$ a daný počet smluv *n* nastane v případě, kdy
  - $(1 - p) \cdot n$ smluv má nulovou PML a
  - $p \cdot n$ smluv má stejnou nenulovou PML (pro jednoduchost jednotkovou, tzn. $MEAN_{PML} = p$).

Určení *k* v případě libovolné $\mathrm{SKEW}_{\mathrm{PML}}$

- V takovém případě platí

$$R(n,p,STD_{PML},SKEW_{PML}) = R(p\cdot n,1,0,0)$$

$$\hat{k}_{max}(n,p)\cdot p\cdot \hat{r}(n) = \hat{r}(p\cdot n)$$

$$\hat{k}_{max}(n,p) = \frac{\hat{r}(p\cdot n)}{p\cdot \hat{r}(n)}.$$

Určení *k* v případě libovolné SKEW_{PML}

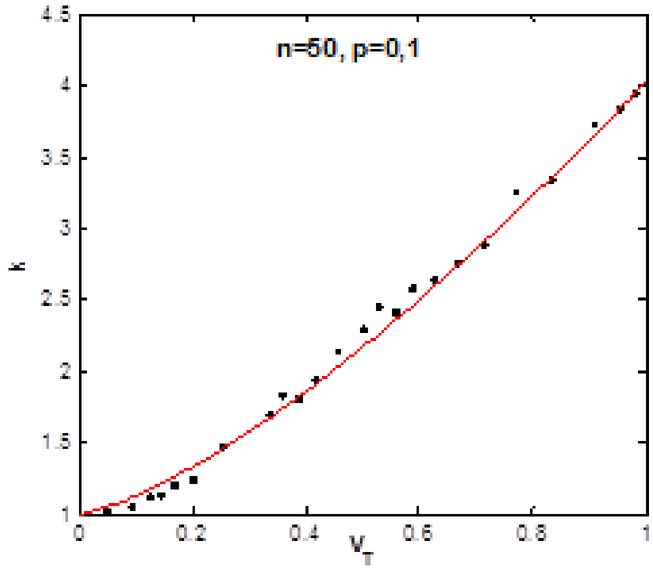
- Formuli pro výpočet *k* tak můžeme zobecnit i na případ nenulové šikmosti následovně

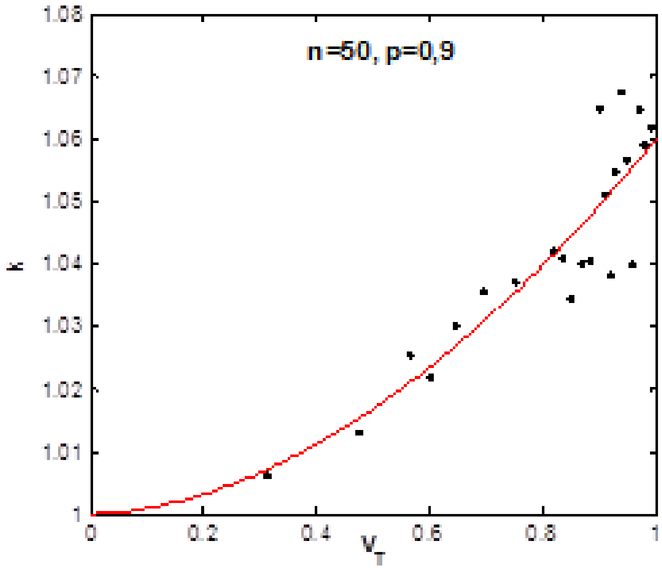
$$\boxed{\hat{k}(n, V_{PML}, SKEW_{PML}) = 1 + \left(\hat{k}_{max}(n,p) - 1\right) \cdot {V_T}^{b}.}$$

- *b*≥1 modelující "prohyb" funkce závisí na počtu smluv, variačním koeficientu i na šikmosti (reprezentované parametrem *p*).
- Čím blíže je hodnota *b* k 1, tím rychleji se blíží hodnoty *k* ke k_{max}.

Určení *k* v případě libovolné SKEW$_{PML}$

- Nejvíce je patrná závislost na parametru *p*, kdy pro *p* blížící se k 0 se hodnoty *b* blíží k 1.



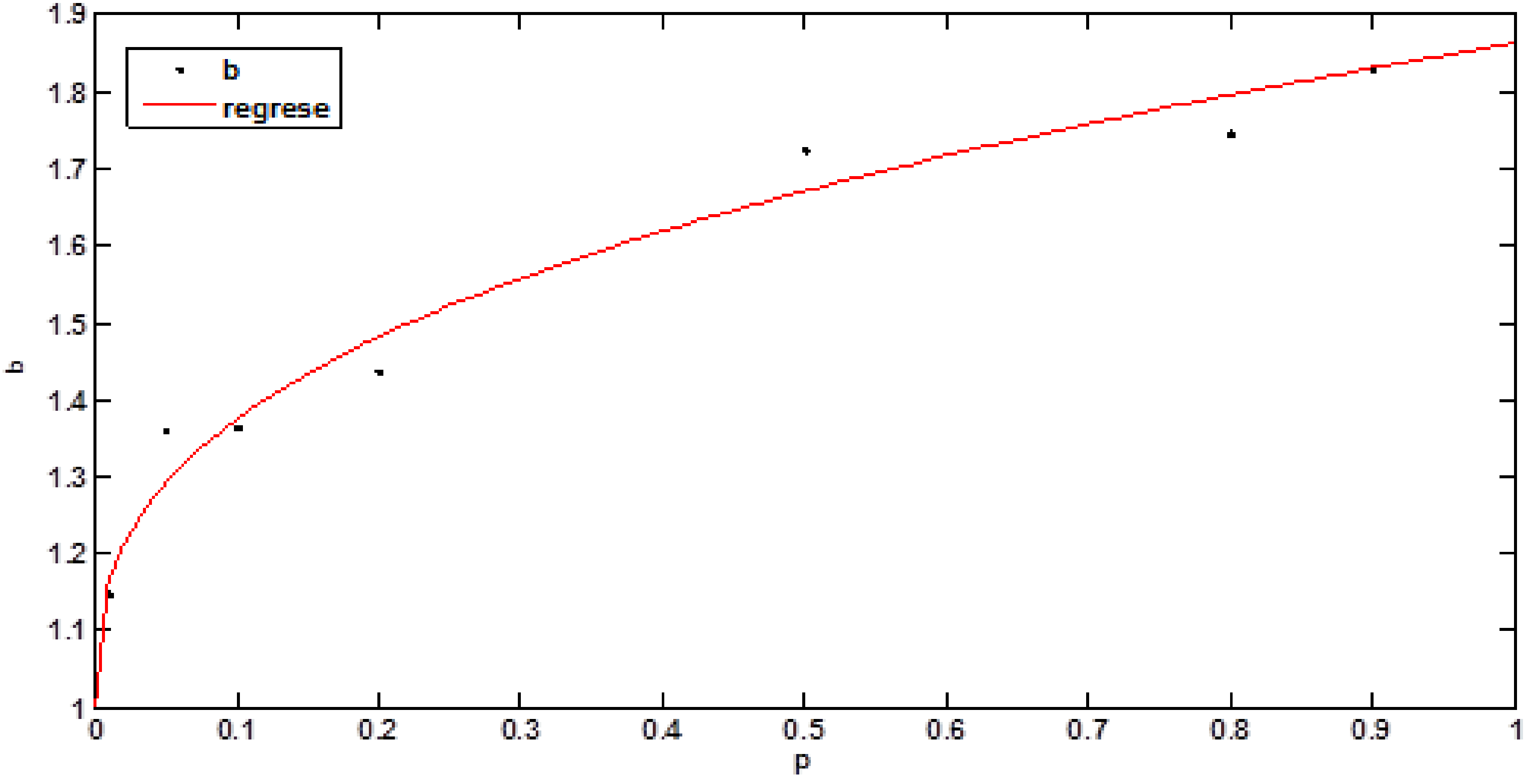


Určení *k* v případě libovolné SKEW_{PML}

- V modelovém příkladu byl zvolen zjednodušený přístup k modelování parametru *b*.
- Pro konkrétní hodnoty *p* (0,01; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 0,8 a 0,9) byla provedena série simulací hodnot *k* pro několik *n* a řadu V_T.
- Ke každému *p* bylo přiřazeno odpovídající b_p jako průměrná hodnota ze všech hodnot *b* při daném *p.*
- Hodnoty b_p pak byly proloženy regresí

$$\boxed{\hat{b}(p) = 1 + a_1 \cdot p^{a_2}.}$$

Určení *k* v případě libovolné SKEW$_{PML}$



Uplatnění modelu

- **Underwriter tedy před upsáním nové smlouvy:**
  - zadá novou hodnotu *n* (stávající počet smluv zvětší o 1),
  - navýší své celkové předepsané pojistné (je tedy zohledněna i jeho upisovací minulost),
  - navýší souhrn PML z jednotlivých smluv.
- Z funkcí RAC a ROE pak vyčteme přímo nové hodnoty jím spotřebovaného kapitálu a očekávanou hodnotu ROE.

Závěry plynoucí z modelu

- **Z vlastností funkce** $Q_{0,995}$ **plyne:**
  - vzhledem k celkovému předepsanému pojistnému je nejvýhodnější, jsou-li všechny PML přibližně stejně vysoké.
  - Nárůst RAC je nejmenší v případě, že k několika velkým PML se přidá pár smluv s malým PML (záporná šikmost), dále následuje případ, kdy jsou PML relativně symetricky rozptýlené (nulová šikmost), nejhorší je pak situace, kdy se ke spoustě smluv s malou PML přidá smlouva s velkým PML (kladná šikmost).
  - Tento nárůst klesá s rostoucím počtem smluv.

Modelový příklad

- **Jsou zadány následující parametry:**
  - vlastní kapitál … 250 mil
  - náklady … 25%
  - rating … 150%
- **Kategorie rizikovosti upisovaných smluv:**
  - rozdělení pravděpodobnosti realizace škod – Po(0,1)
  - rozdělení poměru škod k PML – Beta(2,2) („spíše střední škoda“).

Modelový příklad

- **Underwriter upíše 100 smluv, všechny za pojistnou sazbu 0,08, s následujícími PML:**
  a) všechny smlouvy mají stejné PML=19 mil Kč,
  b) 10 smluv má PML=10 mil Kč, 90 smluv má PML=20 mil Kč,
  c) 50 smluv má PML=10 mil Kč a 50 smluv PML=28 mil Kč,
  d) 80 smluv má PML=10 mil Kč a 20 smluv má PML=55 mil Kč,
  e) 90 smluv má PML=10 mil Kč a 10 smluv má PML=100 mil Kč.

Modelový příklad

- **Ve všech případech platí:**
  - MEAN_{PML} je 19 mil Kč, tj. **pojistné** je 152 mil Kč,
  - **průměrné pojistné plnění** je ve všech případech 95 mil Kč,
  - **očekávaný škodní poměr** 62,5%,
  - vzhledem k výši alokovaného kapitálu lze **očekávat ROE** 7,6%.

Modelový příklad

Případ	STD_{PML}	$SKEW_{PML}$	**RAC**	k	RAC/n	ROE_{RAC}
a)	0	0	**115,6**	1	1,16	16,43%
b)	3	-2,67	**117,7**	1,014	1,18	16,15%
c)	9	0	**135,3**	1,137	1,35	14,04%
d)	18	1,5	**188,0**	1,502	1,88	10,11%
e)	45	2,67	**412,3**	3,058	4,12	4,61%